写像の合成・行列の積|0 章平面と 1 次変換

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L07(2023-05-10 Wed)

最終更新: Time-stamp: ”2023-05-10 Wed 07:55 JST hig”

今日の目標

- 対称変換の行列を (ノートを見なくても) 書ける
- 行列の積を (ノートを見なくても) 計算できる
- 写像の合成 と 行列の積 の関係を説明できる

ここまで来たよ

復習: 写像と変換と 1 次変換

写像の記号

$$f : X \to Y$$

写像名 : 定義域 (domain) → 終域 (codomain)

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : 要素, 元 (element) ↦ 像 (image)

「$f(a) = b$」「写像 f による a の像は b」「写像 f は a を b に写す」

$X = Y$ であるような写像を，「X の変換」という．
$X = Y = \mathbb{R}^2$ で，次の形の変換 f を「$\mathbb{R}^2$ の 1 次変換」という．a, b, c, d: 定数

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} \overset{\text{行列による表記}}{=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

対称変換 加藤 線形代数 例 1(p.7)

高校では対称移動と言っていたもの.

例 (対称変換)

次の 1 次変換を表す行列は…

- x 軸に関する対称変換
- y 軸に関する対称変換
- 原点に関する対称変換
- 直線 $y = x$ に関する対称変換

L07-Q1

Quiz(1 次変換を表す行列の求め方)

直線 $y = x$ に関する対称変換を表す行列を求めよう.

◇相似変換と恒等変換 加藤 線形代数 例 1(p.8)

例 (相似変換)

次の 1 次変換を表す行列は…

- 恒等変換 単位行列 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
  - 平面の点を動かさない
- 相似比 k の相似変換 $kE = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.
  - ベクトルを k 倍する

ここまで来たよ

6 写像・変換・1 次変換|0 章平面と 1 次変換

7 写像の合成・行列の積|0 章平面と 1 次変換
- 復習|3. いろいろな 1 次変換
- ◇ 1 次変換の合成|3. いろいろな 1 次変換

最初にまとめ

写像・変換の言葉 (一般的)	行列・ベクトルの言葉
$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$	2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$
$\mathbb{R}^2$ の 1 次変換 f	(2×2) 行列 A
1 次変換による点の像 $f(\boldsymbol{x})$	行列とベクトルの積 $A\boldsymbol{x}$
1 次変換 f, g の合成変換 $g \circ f$	行列の積 BA

◇1 次変換の合成 加藤 線形代数 p.10

定義 (合成写像)

加藤 線形代数 p.10

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ があるとき, $x \in X$ を，まず f, 次に g で写すことで像を得る写像

$$h : X \to Z$$

を考え，$h = g \circ f$ と書く.

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ である.

この h を, f と g の合成写像 (composition) という.

合成写像は f, g の順序による

f と g, g と f の合成写像は異なる. $g \circ f \neq f \circ g$.

- $X = Y = Z$ なら, f, g, h は X の変換. h は合成変換
- $Y = Z = \mathbb{R}$ なら f, g は関数 加藤 線形代数 p.191, h は合成関数

L07-Q2

Quiz(写像の合成)

$\mathbb{R}$ の変換 f, g を考える.

$$\begin{aligned} f &: x \mapsto \sin x, \\ g &: x \mapsto x^2 + 3. \end{aligned}$$

1. 実数 x を, まず f で写し, 次に g で写した像を答えよう.
2. 実数 x を, まず g で写し, 次に f で写した像を答えよう.
3. 合成変換 $g \circ f$ の像 $(g \circ f)(x)$ を求めよう.
4. 合成変換 $f \circ g$ の像 $(f \circ g)(x)$ を求めよう.

加藤 線形代数 例題 4(p.11)

加藤 線形代数 例題 5(p.11) でその上の部分を解説

例

1 次変換 f を表す行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 1 次変換 g を表す行列を $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ とする.
まず f, 次に g で写す 1 次変換 $h = g \circ f$ を表す行列 C を求めよう.

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とする.

$(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})) = B(A\boldsymbol{x}) = B \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x+y)-(2x-y) \\ -5(x+y)+3(2x-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x+3y \\ 1x-8y \end{bmatrix}$.

この 1 次変換を表す行列は $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$.
任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $C\boldsymbol{x} = B(A\boldsymbol{x})$ が成立する.
行列 C を B と A の積 加藤 線形代数 p.22 とよび, 記号 BA で表すことにしよう.
まず f, 次に g だから BA
まず g, 次に f なら AB
一般に BA はどんな式で書ける?

行列の積 加藤 線形代数 p.22

$\boldsymbol{x}$ を使わず，行列だけで完結して合成変換を求められる．

$$\begin{bmatrix} (ae+bg)x+(af+bh)y \\ (ce+dg)x+(cf+dh)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right).$$

$$\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

定義 (行列の積)

行列の積 (右辺) を左辺で定義する．

$$\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

下左 =下 ·左

$BA \neq AB$. なぜなら $g \circ f \neq f \circ g$ だから．

加藤 線形代数 例題 5 mobius K0.3.10

L07-Q3

Quiz(1 次変換の合成と行列の積)

$\mathbb{R}^2$ の変換を考える.

1. x 軸に関する対称変換 f を表す行列 A を求めよう.
2. 直線 $y = -x$ に関する対称変換 g を表す行列 B を求めよう.
3. 行列の積 BA を計算しよう.
4. 行列の積 AB を計算しよう.
5. 点 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ を，まず f で，次に g で写した像を求めよう（順に写す，行列を一度にかける，の 2 つの方法で).
6. 点 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ を，まず g で，次に f で写した像を求めよう（順に写す，行列を一度にかける，の 2 つの方法で).

加藤 線形代数 例題 4(p.11) mobius K0.3.20

写像が等しいとは 加藤 線形代数 p.12,191

定義 (写像が等しい 加藤 線形代数 p.12)

$f: X \to Y$ と $g: Z \to W$ が等しい ($f = g$) (写像として等しい) とは, $X = Z, Y = W$ であって, X の任意の要素 $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ (要素として等しい) が成り立つことをいう.

命題 (1 次変換と行列の 1 対 1 対応)

$\mathbb{R}^2$ の 1 次変換が $f = g$ であること
$\Leftrightarrow$ f, g を表す行列の 4 個の数がそれぞれ等しいこと

3 個以上の写像の合成 加藤 線形代数 p.12 ,3 個以上の行列の積

f, g, h を写像とする.
任意の $x \in X$ に対して,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x))), \quad ((h \circ g) \circ f)(x) = h(g(f(x)))$$

$\rightsquigarrow$ 3 個の合成写像は，2 個ずつの合成をどの順序でしてもよい.

写像の結合法則 (associativity) $\quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

この両辺を, 便利な記号として, $h \circ g \circ f$ と書いちゃう.

f, g, h が 1 次変換とし, これらを表す行列を A, B, C とする.
$h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ の表す行列を考えて,
$\rightsquigarrow$ 行列の積の計算の順序によらない.

行列の積の結合法則 (associativity) $\quad C(BA) = (CB)A$

これを, 便利な記号として, CBA と書いちゃう.
3 個の行列の積は，2 個ずつの積をどういう順序で計算してもいい.