

逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0章平面と1次変換

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L08(2023-05-12 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2023-05-12 Fri 11:11 JST hig"

今日の目標

- 角 θ の回転行列 R_θ が (ノートを見ずに) 書ける
- 行列 A の逆行列 A^{-1} が (ノートを見ずに) 書ける
- 逆写像と逆行列を説明できる



L07-Q1

Quiz 解答: 1 次変換を表す行列の求め方

対称変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は, $f: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$.

1 次変換 f を表す行列を $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

は, x, y についての恒等式. よって, $a = d = 0, b = c = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

別解

1 次変換であることがわかっているなら, 一般の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ でなくても, 必要条件として具体的な (\mathbb{R}^2 なら) 2 点, 例えば $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の写る先を考えて A を決定できる.

L07-Q2

Quiz 解答: 写像の合成

- ① $f(x) = \sin x$. $g(f(x)) = (\sin x)^2 + 3$.
- ② $g(x) = x^2 + 3$. $f(g(x)) = \sin(x^2 + 3)$.
- ③ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sin x)^2 + 3$.
- ④ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2 + 3)$.

L07-Q3

Quiz 解答:1 次変換の合成と行列の積

- ① $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$.
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- ② $g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$.
 $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
- ③ $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
- ④ $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- ⑤ $(g \circ f)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$.
- ⑥ $(f \circ g)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$.

ここまで来たよ

- 7 写像の合成・行列の積|0章平面と1次変換
- 8 逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0章平面と1次変換
 - ◇回転と1次変換|3. いろいろな1次変換
 - ◇逆写像|3. いろいろな1次変換

◇回転と 1 次変換 加藤 線形代数 (p.13)

例 (回転変換)

原点のまわりに一般角 θ だけ回転移動する 1 次変換 f_θ を表す行列 (回転行列) は

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

なぜなら, 1 次変換であることを仮定して,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

から 行列 R_θ を決めるとそうなる.

覚え方

自分の言葉でどうぞ

L08-Q1 ちょっと

Quiz(回転移動の 1 次変換の行列)

- ① 点 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ を, 原点を中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転移動した点 \boldsymbol{x}' を求めよう.
- ② 点 \boldsymbol{x}' を, さらに, 原点を中心に $\frac{1}{3}\pi$ だけ回転移動した点 \boldsymbol{x}'' を求めよう.

加藤 線形代数 例題 6(p.14) mobius K0.3.40

ここまで来たよ

- 7 写像の合成・行列の積|0 章平面と 1 次変換

- 8 逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0 章平面と 1 次変換
 - ◇回転と 1 次変換|3. いろいろな 1 次変換
 - ◇逆写像|3. いろいろな 1 次変換

最初にまとめ

写像・変換の言葉 (一般的)	行列・ベクトルの言葉
\mathbb{R}^2 の点 \boldsymbol{x}	2次元ベクトル \boldsymbol{x}
\mathbb{R}^2 の 1 次変換 f	(2×2) 行列 A
1 次変換による点の像 $f(\boldsymbol{x})$	行列とベクトルの積 $A\boldsymbol{x}$
1 次変換 f, g の合成変換 $g \circ f$	行列の積 BA
1 次変換 f の逆変換 f^{-1}	逆行列 A^{-1}

ちょっとした略記の定義

定義 (行列のスカラー倍)

記号 $k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times k$ を次のように定義する。

$$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times k = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

記号は 空白でも \times でも \cdot でもよい (実数同士の積と同じ気分)

◇逆写像

復習+ちょっと

写像

$$f : X \rightarrow Y$$

写像名 : 定義域 (domain) \rightarrow 終域 (codomain)

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : \mapsto 像 (image)「 $f(a) = b$ 」 「写像 f による a の像は b 」 「写像 f は a を b に写す」

定義 (値域 (range) 加藤 線形代数 p.12)

終域の部分集合 $\{f(x)|x \in X\} \subset Y$ を f の値域という。

定義 (上への (onto) 写像, 全射 (surjection) 加藤 線形代数 p.12)

f は X から Y の上への写像 \Leftrightarrow 値域=終域

定義 (1 対 1 の (one-to-one) 写像, 単射 (injection) 加藤 線形代数 p.13)

f は 1 対 1 の写像 $\Leftrightarrow (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

定義 (全単射 (bijection) 加藤 線形代数 p.13)

f が全単射 $\Leftrightarrow f$ が Y の上への 1 対 1 の写像

定義 (逆写像)

f が Y の上への 1 対 1 の写像であるとき
 Y の各要素 y に対して $f(x) = y$ となる X の要素がただひとつ定まる。
 $g: y \mapsto x$ で写像 $g: Y \rightarrow X$ を定める。
 g を f の逆写像といい、 f^{-1} とかく。

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$
$$f(x) \mapsto x$$

変換なら **逆変換**

写像・関数の肩の $^{-1}$ は (**逆数ではなく**) 逆写像・逆関数

L08-Q2

Quiz(逆写像)

- ① 写像 $f : \{x|x > 0, x \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \log x$ に逆写像があれば求めよう.
- ② 写像 $g : \{x|x \neq 0, x \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : x \mapsto \log |x|$ に逆写像があれば求めよう.
- ③ 写像 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h : x \mapsto e^x$ に逆写像があれば求めよう.

逆写像の性質

命題 (逆写像の逆写像)

逆写像の逆写像はもとの写像. すなわち $(f^{-1})^{-1} = f$

定義 (恒等写像 (恒等変換))

$$\text{id}_X : X \rightarrow X$$

$$\text{id}_X : x \mapsto x.$$

命題 (\mathbb{R}^2 の恒等変換)

$\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ は 1 次変換で, 単位行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で表される.

命題 (逆写像の性質)

$f : X \rightarrow Y$, 1 対 1 で上への写像のとき,

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$$

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X$$

1次変換の逆変換の行列は?

逆行列を求める

例 (一般の1次変換の逆変換)

1次変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が1対1で X の上への変換であるとする. f が行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で表現されるとき, f^{-1} を表現する $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ は?

考え方1

A は $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ だから,
 $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ だから, ここから B を求める.

考え方2 $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ より

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

未知数 p, q, r, s の4元1次方程式. これを解く.

定義 (逆行列)

1次変換 f を表す行列が $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき、逆変換 f^{-1} があるなら、それを表す行列を**逆行列 (inverse)** A^{-1} といい、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix}$$

とかける. 略記 $\Delta = ad - bc$ (ギリシャ文字デルタ. ‘デターミナント’).

証明 加藤 線形代数 p.32. 検算は容易.

命題 (逆行列の逆行列)

A の逆行列が A^{-1} であるとき

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

L08-Q3

Quiz(逆行列)

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ に対して, $BA = E$ を満たす行列 B を求めよう.

加藤 線形代数 例題 4(p.36)

加藤 線形代数 練習 7(p.36)

(検算容易)

mobius K0.3.30

チーム課題 L08