対角行列・証明 | 第 1 章 行列の概念

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L13(2023-05-31 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-05-31 Wed 14:41 JST hig"

今日の目標

- 和差積逆スカラー倍の混ざった正方行列の計算ができる
- 空間の 1 次変換の行列を書ける
- 上下三角, 対角, 対称行列の定義を使った証明ができる

L12-Q1

Quiz 解答: パラメタ表示された直線の 1 次変換による像

1. $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ は解 $t = 1$ を持つので $\boldsymbol{x}_1$ は ℓ 上にある.
   $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ は解 $t = 1$ を持たないので $\boldsymbol{x}_2$ は ℓ 上にない.
2. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$.
3. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. よって, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$.

L12-Q2

Quiz 解答: 方程式で定まる直線の 1 次変換による像

1. 代入してみると, $\boldsymbol{x}_1$ は方程式を満たす (方程式の解である) ので, $\boldsymbol{x}_1$ は ℓ 上にある. $\boldsymbol{x}_2$ は方程式を満たさない (方程式の解でない) ので, $\boldsymbol{x}_2$ は ℓ 上にない.
2. ${}^{\mathrm{t}}A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = 0$$

3. ${}^{\mathrm{t}}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$

$$\left(\boldsymbol{x} - \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]\right) \cdot \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right] = 0$$

ここまで来たよ

行列の計算のルール

次のルールだけを使ってよい．ここにないルールは使ってはいけない．

- 積（零行列，単位行列の乗算） 加藤 線形代数 定理 2-2(p.26)
- 逆行列のルール 加藤 線形代数 定理 3-2(p.36)
- 零行列の加算のルール 加藤 線形代数 定理 2-1(p.24)
- 巾の略記 $A^n = \underbrace{AA\dots A}_{n}$, $A^0 = E$,

  $A^{-n} = (A^n)^{-1} = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\dots A^{-1}}_{n}$

L13-Q1

Quiz(行列の積和逆スカラー倍)

次の行列の積を展開して，括弧がない簡単な形にしよう．

1. $(AB + (2BA)^{-1})(3A + BA)$
2. $B(A + B^2 + B^{-1} + (4AB)^{-1})B^{-1}$

ここまで来たよ

3 次元空間の 1 次変換

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を 3 次の正方行列 A で移動させることができる.

z 軸を回転軸とする xy 平面内の回転　ブロック分け，ブロック対角行列

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & +\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

x 軸を回転軸とする yz 平面内の回転　ブロック分け，ブロック対角行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & +\cos\theta \end{bmatrix}$$

xz 平面 (平面 $y = 0$) に関する対称変換 (鏡映)　対角行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平面 $x = y$ に関する対称変換 (鏡映)　ブロック分け，ブロック対角行列

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L13-Q2

Quiz(3 次元の回転)

y 軸を回転軸とする, xz 平面内の角 θ の回転の線形変換 (1 次変換) を表す行列を書こう. ただし, どっちまわりを正の θ にするかは自由に決めてよい.

3 次元の回転行列とオイラー角

2 次元の回転行列は 1 パラメタ θ で R_θ.
3 次元の任意の回転は, 3 パラメタ必要 (フライトシミュレータでヨー, ピッチ, ローがあるのはそのため).
オイラー角 ψ, θ, ϕ にとることが多い.
3 次元の回転行列は, 角 ψ, θ, ϕ の平面回転の合成 (行列の積) で書ける.

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

http://irobutsu.a.la9.jp/mybook/ykwkrAM/sim/EulerAngle.html

ここまで来たよ

12 1 次変換による直線の像・上下三角行列 | 第 1 章 行列の概念

13 対角行列・証明 | 第 1 章 行列の概念
- 行列の計算
- 3 次元空間の 1 次変換
- 上三角行列, 下三角行列, 対角行列,(反) 対称行列
- 証明の書き方と反例の見つけ方

◆上三角行列, 下三角行列, 対角行列

定義 (上下三角行列, 対角行列 加藤 線形代数 p.37,(反) 対称行列)

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して

- A が上三角行列 (upper triangular matrix) $\Leftrightarrow (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- A が下三角行列 (lower triangular matrix)$\Leftrightarrow (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- A が対角行列 (diagonal matrix) $\Leftrightarrow (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0) \Leftrightarrow$「対角でない成分はゼロ」
- A が対称行列 (symmetric matrix) $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = + {}^{\mathrm{t}}A$.
- A が反対称行列 (anti-symmetric matrix) $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = - {}^{\mathrm{t}}A$.

$P \Leftrightarrow Q$: P と Q は同値, Q は P の必要十分条件, P を Q で定義する.
$P \Rightarrow Q$: P ならば Q, P は Q の十分条件, Q は P の必要条件, P: 仮定, Q: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

$P\backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	偽	真

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

$P\backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	真	真

対角行列

n 次対角行列

具体的な表示

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

（右上・左下の成分はすべて 0）

$D = [d_{ij}]$ とすると，クロネッカーのデルタを使って

$$d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} (= \lambda_j \delta_{ij}).$$

ギリシャ文字ラムダ, 小文字 λ, 大文字 Λ.

$d_{ii} = \lambda_i$ を対角成分という．

対角行列全体は, n 次正方行列の中で, 扱いの簡単なファミリーになっている (部分ナントカ).

線形代数 II(後期), 代数 (3 年)

何か計算していて対角行列にできたらラッキー　対角化

線形代数 II(後期)

和 $\sum$ とクロネッカー記号 δ_{ij} の補足

和 $\sum$ 内のクロネッカー記号 δ_{ij}

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} F_{ijkl}G_{ijkm}\delta_{ij} \\
=&F_{i1kl}G_{i1km}\delta_{i1} + \cdots + F_{iikl}G_{iikm}\delta_{ii} + \cdots + F_{inkl}G_{inkm}\delta_{in} \\
=&0 + \cdots + 0 + F_{iikl}G_{iikm} \cdot 1 + 0 + \cdots + 0 \\
=&F_{iikl}G_{iikm}
\end{aligned}
$$

「$\sum_j \delta_{ij}$ナン j トカ は, $\sum_i \delta_{ij}$ を消す代わりに, 代入 $j = i$ でダミー添字 j を消せばいい」

F, G が別の $\sum$ や δ を含んでいてもかまわない.

$\sum$ と δ_{ij} の計算の例題

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{i1}F_{ijk} = ?$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{k1}F_{ijk} = ?$$

加藤 線形代数 章末問題 5(p.39) の簡単バージョン
L13-Q3

Quiz(対角行列の積)

n 次の正方行列 $A = [a_{ik}]$,$B = [b_{kj}]$ を考える.

1. A, B が対角行列ならば, 積 AB も対角行列であることを示そう. このとき, AB の対角成分を求めよう.
2. A が対角行列ならば, べき乗 A^m $(m = 1, 2, \ldots)$ も対角行列であることを示そう. このとき, D^m の対角成分を求めよう.

mobius　K1.3.70
A^0, A^{-m} の定義. e^A の定義.

ここまで来たよ

12 1 次変換による直線の像・上下三角行列 | 第 1 章 行列の概念

13 対角行列・証明 | 第 1 章 行列の概念
- 行列の計算
- 3 次元空間の 1 次変換
- 上三角行列, 下三角行列, 対角行列,(反) 対称行列
- 証明の書き方と反例の見つけ方

証明「示そう」の書き方 (非構成的)

仮定 $\Rightarrow$ 結論

仮定 結論	仮定 よって「仮定を定義で書き直したもの」 「結論を定義で書き直したもの」 よって, 結論	仮定 よって「仮定を定義で書き直したもの」 **(ギャップを埋める)** 「結論を定義で書き直したもの」 よって, 結論

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには, $(P$かつ$Q) \Rightarrow R$ を示せばいい.
「仮定 Q は前に持っていっていい」

単位行列

単位行列 $E = [e_{ij}]$ は上三角行列であることを示そう.

反例のみつけかた

対角行列と正則行列

A が対角行列ならば A は正則行列か? そうなら証明し, 違うなら反例を挙げよう.

アドバイス

- 反例は 1 個でもあればいい
- 例で考えよう
- 低い次元で考えよう (反例なら 1 個あれば OK, 証明ならそこから一般の次元に).

やまかんの正当化

対角行列の逆行列

対角行列の逆行列を求めよう (=逆行列と思うものを挙げ，それが逆行列になっていることを証明しよう)

- やまかんで (または下心を隠して) 構成して, 定義を満たすことをいう