掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L16(2023-06-09 Fri)

最終更新: Time-stamp: ”2023-06-09 Fri 07:19 JST hig”

今日の目標

- 掃き出し法で簡約階段形して階数を求められる
  加藤 線形代数 pp.54-59
- 拡大係数行列の簡約階段化を求めて, 連立 1 次方程式が解ける 加藤 線形代数 例題 1(p.62)

L15-Q1
Quiz 解答: 行基本変形による連立 1 次方程式の解法

1. 略.
2. $$x_1 = 7, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

過程省略. 動画見て.

ここまで来たよ

◆行基本操作と行基本変形 加藤 線形代数 p.48

定義 (行列の行基本操作 (elementary row operations))

ⓘ, ⓙ は拡大係数行列の行番号

(R1) ⓘ $\leftrightarrow$ ⓙ, $i \neq j$
(R2) ⓘ $\times$ (定数c), $c \neq 0$
(R3) ⓙ $\times$ (定数a) $+$ ⓘ, $i \neq j$

行 Row, 列 Column

加藤 線形代数 練習 1(p.49) mobius K2.1.30

行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

◆行基本変形定理

加藤 線形代数 定理 2-1(p.53)

定理 (行基本変形定理の言い換え)

任意の行列 A には簡約階段化 (適当な行基本変形によって A から到達できる簡約階段形の行列) が存在する.
任意の行列 A には簡約階段化は一意である (ただ一つに定まる) 加藤 線形代数 注意 (p.58).

驚いて疑ってほしい定理
一意性の証明 教科書でも省略 (サポートサイトにあるそう)
存在の証明 入力:A, 出力:A の簡約階段化 であるようなアルゴリズム (あいまいさのない手続き) 加藤 線形代数 p.53–57 を与えることによる
このアルゴリズムは掃き出し法 (row reduction, ガウスの消去法 (Gaussian elimination) などと呼ばれ, 理論的理解に加え, 今後の手計算に使うので暗記する必要.

掃き出し法の概要 加藤 線形代数 pp.54–56

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 c を持っていってピボットにする
(3) 持っていった非零成分 c を R2 ① $\times (1/c)$ で 1 にする
(4) R3 ① $\times (-a) +$ ⓘ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の a を零にする
(10) R3 ① $\times (-a) +$ ⓘ で, ブロックのその列の上側を零にする
(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う
(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

Web アプリで

`https://learn.hig3.net` > 行基本変形計算機

`https://bit.ly/redmatrix`

`https://learn.hig3.net` > 動画 簡約階段化

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 10 & 12 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

◆行列の階数 (rank)

定義 (行列の階数 加藤 線形代数 定義 2-3(p.58))

行列 A の簡約階段化の階数を, A の階数 (rank) といい $\mathrm{rank}A$ と書く.

加藤 線形代数 練習 8,9(p.59) mobius 2.2.40

定理 (階数の性質)

$m \times n$ 行列 A について, 次の不等式が成り立つ.

$\mathrm{rank}A \leq m, \mathrm{rank}A \leq n.$

ここまで来たよ

◆行基本変形と連立 1 次方程式 加藤 線形代数 p.60)

定理 (行基本変形と連立 1 次方程式 加藤 線形代数 定理 3-1(p.60))

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ から, 行基本変形によって, $[B|\boldsymbol{b}']$ が得られるとき, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ は同値.

どうせなら, 簡約階段形の $[B|\boldsymbol{b}']$ で解いた方が楽.

証明

- 操作前の連立 1 次方程式が成立するとき, 各操作後の連立 1 次方程式は成立する.
- 行基本操作の可逆性 加藤 線形代数 p.49 から, 操作後から操作前の連立 1 次方程式にも戻せる.

(解が存在する場合の) 連立 1 次方程式の解き方

簡約階段形の拡大係数行列を持つ連立 1 次方程式の解き方 加藤 線形代数 例題 1(p.62)

1. ピボットのない列 ($\mathbf{0}, *$ になっている列) にかかる未知数を，任意定数 (パラメタ) $c, d, \cdots \in \mathbb{R}$ とおく．任意定数の個数を解の自由度 (degree of freedom) という．
2. ピボットにかかる変数は，これらの任意定数の 1 次式で書ける（その行の式を解いて）．

例 加藤 線形代数 例題 1(p.62) 加藤 線形代数 練習 2(p.54)，章末問題 2(p.72)

https://learn.hig3.net > 動画 連立 1 次方程式

例 拡大係数行列

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.

ピボット以外の列 (**0** や $*$ の列) について, $x_1 = c, x_4 = d, x_6 = e$ とおく.

$$\begin{aligned} x_1 &= c \\ 1 \cdot x_2 &= b_1 - 0 \cdot c - 2 \cdot d - 4 \cdot e \\ 1 \cdot x_3 &= b_2 - 0 \cdot c - 3 \cdot d - 5 \cdot e \\ x_4 &= d \\ 1 \cdot x_5 &= b_3 - 0 \cdot c - 0 \cdot d - 6 \cdot e \\ x_6 &= e \end{aligned}$$

同値な書き方. これもできるように.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c, d, e \in \mathbb{R})$$