3.1 基本行列と基本変形| 第 3 章 行列の構造

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L18(2023-06-16 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2023-07-20 Thu 17:13 JST hig"

今日の目標

- 行/列基本操作と, 基本行列を左右からかけることとの対応を説明できる 加藤 線形代数 §3.1

L17-Q1 L17-Q2

Quiz 解答: 簡約階段行列から 1 次方程式の解

1.

$$
\begin{array}{cccccl}
x_2 & +2x_3 & & +3x_5 & +5x_6 & = 7, \\
 & & x_4 & +4x_5 & +6x_6 & = 8, \\
 & & & & 0 & = a, \\
 & & & & 0 & = 0.
\end{array}
$$

2. $a \neq 0$ のとき解なし.
   $a = 0$ のとき, $c, d, e, f \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$\begin{aligned} x_1 &= c, \\ x_2 &= 7 - 2d - 3e - 5f, \\ x_3 &= d, \\ x_4 &= 8 - 4e - 6f, \\ x_5 &= e, \\ x_6 &= f. \end{aligned}$$

3. $a \neq 0$ のとき解なし.
   $a = 0$ のとき, $c, d, e, f \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ここまで来たよ

◆同次連立 1 次方程式

定義 (同次連立 1 次方程式)

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が

1. 同次連立 1 次方程式 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
2. 非同次連立 1 次方程式 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$

同次=斉次=homogeneous(等質)=次数が同じ (今の場合, 各項が 1 次)

命題

同次方程式はつねに自明 (trivial) な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を持つ

証明: 同次連立 1 次方程式では $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}[A|\boldsymbol{b}]$.

定義 (非自明な解)

同次方程式の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を非自明 (non-trivial) な解という

英単語自明 (trivial) はいろんな文脈でも登場.「わかりきった」?

定理 (同次連立 1 次方程式の非自明な解の存在 加藤 線形代数 定理 3-3(p.69))

A を $m \times n$ 行列とする.
n 変数の同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (**) は

1. $\operatorname{rank} A = n \Rightarrow$ (**) は自明な解しか持たない
2. $\operatorname{rank} A < n \Rightarrow$ (**) は非自明な解を持つ

- $\mathbf{0}$ は自明な解.
  - 同次連立 1 次方程式の解全体の集合の直線や平面は原点を通る.
- 自明な解しか持たないなら, 解は一意に定まる.
  - 解全体の集合が 1 点=原点の場合のこと.
- 非自明な解が存在するなら, 無限個の解が存在する.
  - 解全体の集合が原点を通る直線や平面のときが, 非自明な解があるとき.

加藤 線形代数 例題 4, 練習 5(p.70), 章末問題 3(p.72) mobius K2.3.50 mobius K2.3.70

ここまで来たよ

17 3 連立 1 次方程式の解 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- ◆同次連立 1 次方程式|3. 連立 1 次方程式とその解

18 3.1 基本行列と基本変形| 第 3 章 行列の構造
- ◆基本行列|1. 基本行列と基本変形
- ◆列基本変形|1. 基本行列と基本変形

◆基本行列 加藤 線形代数 p.75

$P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ はいずれも, 単位行列をちょっと変更した m 次正方行列.

P_{ij}, P_i の i, j は基本行列の番号. $P_{ij} = [a_{k\ell}]$ の k, ℓ は行番号列番号.

$P_{ij}\ (i \neq j)$

例: 3 次の $P_{12} = P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$P_{ij} = [a_{k\ell}]$ とすると,

$$a_{k\ell} = \delta_{k\ell}(1 - \delta_{ik} - \delta_{j\ell}) + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}.$$

$P_{ij} = P_{ji}$

$P_i(c)$

例: 3 次の $P_2(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$P_i(c) = [b_{k\ell}]$ とすると,

$$b_{k\ell} = \delta_{k\ell}(1 \cdot (1 - \delta_{ik}) + c \cdot \delta_{ik})$$

$P_{ij}(a)$ $(i \neq j)$

例: 3 次の $P_{23}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{31}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

「2 行 3 列に 5, 3 行 1 列に 5」

$P_{ij}(a) = [c_{k\ell}]$ とすると,

$$c_{k\ell} = \delta_{k\ell} + a\delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

$P_{ij}(a) \neq P_{ji}(a)$

行基本操作 (復習) 加藤 線形代数 p.48 線形代数☆演習 I(2023)L15

定義 (行列の行基本操作 (elementary row operations))

i, j は拡大係数行列の行番号. ①,②, . . .

(R1) $i \leftrightarrow j$, $i \neq j$
(R2) $i \times$ (定数c), $c \neq 0$
(R3) $j \times$ (定数a) $+\, i$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column
これらは可逆
行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

◆基本行列と行基本変形 加藤 線形代数 p.76

命題 (行基本操作 $\leftrightarrow$ 基本行列の左からの積)

$m \times n$ 行列 A に対して, 行基本操作は m 次の基本行列を左からかけるのと同じ

(R1) P_{ij} を左からかける
(R2) $P_i(c)$ を左からかける
(R3) $P_{ij}(a)$ を左からかける $j \times (定数 a) + i$

加藤 線形代数 練習 2(p.77) mobius K3.1.10

行基本変形 基本行列の積を左からかけるのと同じ
積の順序に大注意
「まず (R1), つぎに (R3)」は $P_{23}(a)(P_{12}A)$ なので, 行列の積
$Q = P_{23}(5)P_{12}$.

加藤 線形代数 例 1, 練習 3(p.77) mobius K3.1.30

例

$$P_{12}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$$

$P_3(5)F = [g_{kp}]$ とする.

$$g_{kp} = \sum_{\ell} b_{k\ell} f_{\ell p} =$$

例

$$P_{23}(5)\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 7\\9 & 11\end{bmatrix} = \qquad\qquad \begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 7\\9 & 11\end{bmatrix}$$

L18-Q1

Quiz(基本行列)

行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ を考える.

1. A を行基本変形で簡約階段形にしよう.
2. 上で求めた行基本変形に現れた基本操作それぞれに対応する基本行列 $Q_1, Q_2, \ldots$ を，記号と成分で書こう (Q_1 が最後の基本操作に対応する).
3. 上で求めた基本行列の積を考え，基本変形に対応する行列 Q を成分で求めよう.
4. QA が簡約階段形であることを確かめよう.

定理 (行基本変形定理 (その 2) 加藤 線形代数 定理 1-1(p.77))

任意の $m \times n$ 行列 A に対して, $B = Q_1 Q_2 \cdots Q_s A$ が簡約階段形の行列となるような m 次の基本行列 $Q_1, \ldots, Q_s$ が存在する.

これは行基本変形定理 加藤 線形代数 定理 2-1(p.53) の言い換え

証明 最初の基本操作に対応する行列が $Q_s, \ldots,$ 最後の基本操作に対応する行列が Q_1.

ここまで来たよ

◆列基本変形

定義 (行列の列基本操作 (elementary column operations) 加藤 線形代数 p.78)

$\boxed{i}$, $\boxed{j}$ は行列の列番号

(C1) $\boxed{i} \leftrightarrow \boxed{j}$, $i \neq j$

(C2) $\boxed{i} \times$ (定数c), $c \neq 0$

(C3) $\boxed{j} \times$ (定数a) $+ \boxed{i}$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column

これらは可逆

列基本変形 列基本操作を繰り返して行列を変形すること

加藤 線形代数 練習 4(p.78)

◆基本行列と列基本変形 加藤 線形代数 p.79

命題 (列基本操作 ↔ 基本行列の右からの積)

$m \times n$ 行列 A に対して, 列基本操作は n 次の基本行列を右からかけるのと同じ

(C1) P_{ij} を右からかける
(C2) $P_i(c)$ を右からかける
(C3) $P_{ji}(a)$ を右からかける $\boxed{j} \times$ (定数a) $+ \boxed{i}$

例

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} P_{12}(2) =$$

加藤 線形代数 練習 5(p.80) mobius K3.1.50

列基本変形 基本行列の積を右からかけるのと同じ

「まず (C1), つぎに (C3)」は $(AP_{12})P_{23}(5)$ なので, 行列の積
$P = P_{12}P_{23}(5)$.

加藤 線形代数 練習 6(p.80)

◆行列の標準形

定理 (行列の標準形 加藤 線形代数 定理 1-2(p.81))

任意の $m \times n$ 行列 A に対して,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

(「最初の $r = \operatorname{rank} A$ 個の対角成分のみ 1, 他はぜんぶ 0」) の形の $m \times n$ 行列 B が一意的に存在して, 適当な

- m 次の基本行列の積 Q
- n 次の基本行列の積 P

で, $QAP = B$ とできる

一意性の証明 A の階数だけで決まるから.

定義 (行列の標準形)

上の B を, A の標準形という.

一意だから, そう定義してよい.

存在の証明「行基本変形, 列基本変形で B に到達する」アルゴリズムを与える. 加藤 線形代数 p.81. このアルゴリズムは手計算でも使う.

- A をまず行基本変形で簡約階段形にする.
  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 主列以外の列 $\boxed{i}$ の非零成分 a は, 主列 $\boxed{j}$ に対して, $\boxed{j} \times (-a) + \boxed{i}$ で 0 にできる.
- 主列以外の列 $\boxed{i}$ が **0** のとき, 主列 $\boxed{j}$ と $\boxed{j} \leftrightarrow \boxed{i}$ で交換して右側に持っていく.

加藤 線形代数 例題 1(p.83), 練習 7(p.83), 章末問題 (p.94)