3.2 正則行列 | 第 3 章 行列の構造

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L19(2023-06-21 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-06-23 Fri 11:40 JST hig"

今日の目標

- 正則行列の判定条件を説明できる
- 正則行列の判定条件を適用できる

L18-Q1
Quiz 解答: 基本行列

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\times\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\times 2+①} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$
2. A が 3×2 行列なので, 3 次の基本行列を使う.
   [Q_i の i の命名方法は教科書にしたがった.
   - $① \leftrightarrow ③$: $\quad Q_3 = P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$
   - $② \times \frac{1}{3}$: $\quad Q_2 = P_2(\frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$
   - $② \times 2 + ①$: $\quad Q_1 = P_{12}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$
3. 3 次の正方行列の積を計算して，$Q = Q_1 Q_2 Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$
4. 行列の積を計算して $QA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (= B).$

復習: 正則行列 線形代数☆演習 I(2023)L11

定義 (正則行列と逆行列 加藤 線形代数 定義 3-2(p.32))

n 次正方行列 A に対して, $XA = AX = E$ となる n 次行列が存在するとき, A を正則行列 (non-singular matrix) といい, X は A の逆行列 (inverse matrix) であるといい $X = A^{-1}$ とかく.

$n = 2$ の $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ は $\Delta = ad - bc \neq 0$ のとき正則で $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right]$ だった.

定理 (正則行列の性質 加藤 線形代数 定理 3-2(p.33))

積 A, B が正則行列 ならば, AB も正則行列で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

逆 A が正則行列 ならば, A^{-1} も正則行列で, $(A^{-1})^{-1} = A$.

転置 A が正則行列 ならば, ${}^{t}\!A$ も正則行列で, $({}^{t}\!A)^{-1} = {}^{t}(A^{-1})$.

◆基本行列の正則性

定理 (基本行列の正則性 加藤 線形代数 定理 2-1(p.84))

- n 次の基本行列 $P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n.\ i \neq j, c \neq 0)$ はすべて正則行列.
- 逆行列は次の通り.
  - $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.
  - $P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$.
  - $P_{ij}(a)^{-1} = P_{ij}(-a)$.

「基本行列の逆行列はまた基本行列」

基本行列の正則性の証明 加藤 線形代数 p.84

下心 基本操作は可逆だから, 逆操作の行列が逆行列になってるはず.

加藤 線形代数 練習 1(p.85)

証明

証明 L19-Q1

Quiz(基本行列の逆行列)

$P_i(c) = [b_{k\ell}]$ としたとき, $b_{k\ell} = \delta_{k\ell}(1 \cdot (1 - \delta_{ik}) + c\delta_{ik}))$ であることを利用して, $P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$ であることを示そう.

系 (加藤 線形代数 定理 1-1(p.77) 定理 1-2(p.81) の系)

任意の $m \times n$ 行列 A について,

- QA が簡約階段行列となる m 次正則行列 Q が存在する.
- QAP が標準形となる n 次正則行列 P が存在する.

一意ではない

証明 定理の証明で, $Q = Q_1 \cdots Q_s$, $P = P_t \cdots P_1$ とすると, Q, P は正則行列の積なので, やはり正則行列.

「任意の行列は左から適当な正則行列をかけて簡約階段行列にできる」

◆正則行列の構造

定理 (正則行列の構造 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85)**)**

n 次正方行列について次の 4 つの条件は同値.

(a) A は正則行列
(b) $\mathrm{rank}\ A = n$ 　‘フルランク’, 簡約階段形が単位行列
(c) A は有限個の基本行列の積に等しい
(d) 待て 加藤 線形代数 4 章 $\det A \neq 0$

mobius　K3.2.50
実用的には，いつでも階段行列に基本変形して (b) で判定できる
「正則行列でない」の便利な十分条件: 次の補助定理，その系.
証明
補助定理 加藤 線形代数 例題 1, 練習 2, 練習 3(p.86) を準備した上で,
(a)⇒(b)⇒(c)⇒(a) を示す.
(a)⇒(b) 部分は, 対偶 (contraposition)「((b) でない)⇒((a) でない)」を示す.

補助定理

命題 (加藤 線形代数 例題 1(p.86))

n 次正方行列 A について, n 行目が ${}^t\mathbf{0}$ ならば A は正則でない.

証明

系 (加藤 線形代数 (p.86))

n 次正方行列 A について,

-1 加藤 線形代数 例題 1(p.86) n 行目が ${}^t\mathbf{0}$ ならば A は正則でない.

列 n 列目が $\mathbf{0}$ ならば A は正則でない

0 加藤 線形代数 練習 2 i 行目が ${}^t\mathbf{0}$ ならば A は正則でない

列 加藤 線形代数 練習 2 j 列目が $\mathbf{0}$ ならば A は正則でない

1 加藤 線形代数 練習 3 i 行目と j 行目 $(i \neq j)$ が一致するならば A は正則でない

列 加藤 線形代数 練習 3 i 列目と j 列目 $(i \neq j)$ が一致するならば A は正則でない

2 i 行目が, j 行目 $(i \neq j)$ の c 倍ならば A は正則でない

列 i 列目が, j 列目 $(i \neq j)$ の c 倍ならば A は正則でない

3 j 行目の a 倍を, i 行目に加えたものが, k 行目 $(k \neq i)$ に等しいならば A は正則でない

列 j 列目の a 倍を, i 列目に加えたものが, k 列目 $(k \neq i)$ に等しいならば A は正則でない

証明の例

背理法 proof by contradiction

p, q: 命題.
$p \Rightarrow q$ を示そうとするときに，
「q」よりも「q でない」のほうが簡単で，(条件として) 使いやすいとき，に背理法がよく使われる
特に,「q」自身が「(有名な概念) でない」のとき，「q でない」は「(有名な概念)」

背理法

- q でない，とする
- p とする．
- $\vdots$
- 過程
- $\vdots$
- 矛盾
- q である．

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 (b) でない $\Rightarrow$ (a) でない

「 (b) でない」すなわち $\operatorname{rank} A \neq n$ とする.

すなわち $\operatorname{rank} A < n$ とする.
正則な P で簡約階段形 PA にする. PA の n 行目は ${}^t\mathbf{0}$. 補助定理 加藤 線形代数 例題 1(p.86) より PA は正則でない.

(ここ背理法) A が正則とすると, 積 PA も正則. 矛盾. よって, A は正則でない.

A は正則でない. すなわち,「 (a) でない」

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 (b)$\Rightarrow$ (c)

(b) $\operatorname{rank} A = n$ とする
ある正則な $P = Q_1 \cdots Q_s$ で簡約階段化したとき, $PA = E$.
$A = P^{-1} = (Q_s \cdots Q_1)^{-1} = Q_1^{-1} \cdots Q_s^{-1}$
これらはすべて基本行列 加藤 線形代数 定理 2-1(p.84).
よって基本行列の積で書ける (c)

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 (c)$\Rightarrow$ (a)

(c) A が有限個の基本行列の積で書けるとする.
基本行列は正則行列.
正則行列の積はまた正則行列.
よって A は正則行列 (a)

お知らせ

- trialL19 はレポート的．2023-06-23 金朝 ではない．
- (短い) レポート 1 学期途中の振り返り
- 数学検定 1 級 2024 年 4 月
  - 初回アンケート ($N = 53$) より, 準 1 級 2, 2 級 9, 準 2 級 5, 3 級 8.

https://learn.hig3.net/moodle/course/view.php?id=6&section=11