4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L23(2023-07-05 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-07-05 Wed 11:28 JST hig"

今日の目標

- 置換の転倒数と符号を求められる
- 行列式の定義を説明でき，計算できる
- 行列式の行多重線形性・行交代性を説明できる
- 2 次の行列式と平行四辺形の面積の関係を説明できる

L22-Q1

Quiz 解答: 置換の合成

1. $\sigma\tau(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(1) = 2 \in X$, $\tau\sigma(3) = \tau(\sigma(3)) = \tau(3) = 1 \in X$.
2. $\sigma\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right), \tau\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in S_4$.
3. $\tau^{-1}(3) = 2 \in X$.
4. $\tau^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in S_4$.

L22-Q2

Quiz 解答: 置換と添字

1. $f(x_2, x_3, x_1) = 2x_2 + 3x_3 + 5x_1$
2. $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = 2x_{\sigma(1)} + 3x_{\sigma(2)} + 5x_{\sigma(3)} = 2x_2 + 3x_1 + 5x_3$.
3. $\tau\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ より, $f(x_{\tau\sigma(1)}, x_{\tau\sigma(2)}, x_{\tau\sigma(3)}) =$
   $2x_{\tau\sigma(1)} + 3x_{\tau\sigma(2)} + 5x_{\tau\sigma(3)} = 2x_1 + 3x_3 + 5x_2$.

置換の符号の別の特徴づけ

定義 (転倒数 加藤 線形代数 例題 3(p.104))

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換 σ に対して,
X の要素の $n(n-1)/2$ 個のペア (i, j) $(i < j)$ のうち, $\sigma(i) > \sigma(j)$ であるものの個数を,
σ の転倒数 という.

命題

$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\sigma \text{ の転倒数}}$.

加藤 線形代数 練習 5(p.104) mobius K4.1.20, K4.1.30

例 $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
ペア $(2,3)$ は $\sigma(2) = 4 > \sigma(3) = 3$.
ペア $(2,4)$ は $\sigma(2) = 4 > \sigma(4) = 2$.

$$\begin{aligned} D(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \\ &\qquad (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \\ &\qquad (x_3 - x_4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) &= (x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(4)}) \\ &\qquad (x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(4)}) \\ &\qquad (x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)}). \\ &= (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2) \\ &\qquad \color{red}{(x_4 - x_4)(x_4 - x_3)} \\ &\qquad (x_2 - x_3). \end{aligned}$$

定義 (互換 加藤 線形代数 例 5(p.105))

$X = \{1, \dots, n\}$ の置換 σ で，ある $i_1, i_2 \in X$ $(i_1 \neq i_2)$ で

$$\begin{aligned} \sigma(i_1) &= i_2, \\ \sigma(i_2) &= i_1, \\ \sigma(i) &= i \quad (i \neq i_1, i_2) \end{aligned}$$

の形のものを 互換 (transposition) といい，$(i_1\ i_2)$ と略記する．

事実 (加藤 線形代数 例 5(p.105))

互換は奇置換

例 $Z=\{1,\ldots,n\}$. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & \color{red}{4} & 3 & \color{red}{2} & 5\end{pmatrix}=(2\ 4)$

$$\begin{aligned}
&D(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\\
&=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)\\
&\quad(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)\\
&\quad(x_3-x_4)(x_3-x_5)\\
&\quad(x_4-x_5)\\
&D(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\sigma(4)},x_{\sigma(5)})\\
&=(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(4)})(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(5)})\\
&\quad(x_{\sigma(2)}-x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(2)}-x_{\sigma(4)})(x_{\sigma(2)}-x_{\sigma(5)})\\
&\quad(x_{\sigma(3)}-x_{\sigma(4)})(x_{\sigma(3)}-x_{\sigma(5)})\\
&\quad(x_{\sigma(4)}-x_{\sigma(5)})\\
&=(x_1-x_4)(x_1-x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_5)\\
&\quad\color{red}{(x_4-x_3)(x_4-x_2)}(x_4-x_5)\\
&\quad\color{red}{(x_3-x_2)}(x_3-x_5)\\
&\quad(x_2-x_5)
\end{aligned}$$

赤い因子は $2(4-2)-1$ 個.

◆偶置換と奇置換|1. 置換

定理 (加藤 線形代数 定理 1-2(p.106))

$X=\{1,\ldots,n\}$ の置換を考える $(n\geq 2)$.

- 置換全体は ${}_n\mathrm{P}_n=n!$ 個ある.
- 偶置換は $n!/2$ 個ある.
- 奇置換は $n!/2$ 個ある.

証明 $\tau=(1\ 2)=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&\cdots\\2&1&3&4&\cdots\end{smallmatrix}\right)$ を固定する. $\tau^{-1}=\tau$. $\mathrm{sgn}(\tau)=-1$.
X の置換全体の集合 S_n の上の変換 $\sigma\mapsto\tau\sigma$ を考えると, これは 1 対 1.

例 $n=4$

σ	$\leftrightarrow (1\ 2)\sigma$
$e=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$(1\ 2)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$
$\vdots$(計 12)	$\vdots$(計 12)
偶置換	奇置換

ここまで来たよ

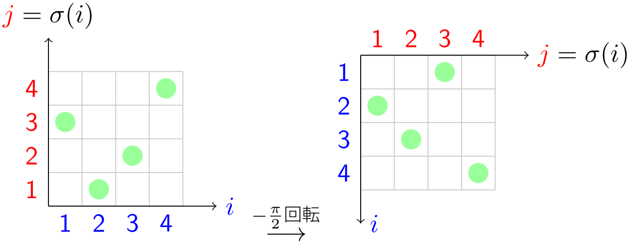
22 4.1 置換 | 第 4 章 行列式

23 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式
- ◆行列式の定義|2. 行列式
- ◆多重線形性と交代性|2. 行列式
- 面積・拡大率としての行列式

互換のグラフ

$n=4, X=\{1,2,3,4\}$.
例として X の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
左が $j=\sigma(i)$ の'グラフ'

- 変換であること: 各列に●が 1 個ある
- '1 対 1 かつ上への' 変換であること: 各行に●が 1 個ある



あれっ 4 次の正方行列みたい…
$X=\{1,\ldots,n\}$ の置換 σ は, n 次の正方行列の, 特定パターンの n 個の成分●
$(i,\sigma(i))$ $(i=1,\ldots,n)$ の選択を指定する.
問: σ^{-1} のグラフは?

◆行列式の定義

定義 (行列式 加藤 線形代数 定義 2-1(p.107))

n 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対して,

$$\det A=\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}(\text{置換●})\cdot\text{成分●の積}=\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

を n の行列式 (determinant) という. $\sum$ は $n!$ 個の置換全ての和.

邪悪な記法

$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$.

$|\quad|$ は絶対値, $|\quad|$ は行列式. $\left|\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\right|=|-2|=2$.

行列式の直接計算の例

加藤 線形代数 例 1–4(pp.107-109)

例 0

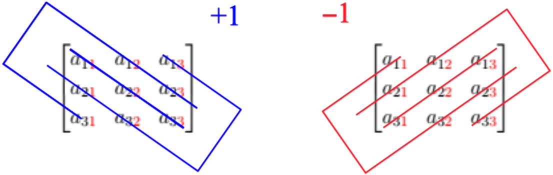
$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 13 & 7 \end{bmatrix}$$

例 1 $n = 2$ 加藤 線形代数 練習 1(p.108), 章末問題 3(1)(p.133) 加藤 線形代数 p.34 $2! = 2$ 項

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = \Delta$$

例 2 $n=3$ 加藤 線形代数 練習 2(p.109), 章末問題 3(2)(p.133) $3! = 6$ 項

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$



サラスの公式

加藤 線形代数 図 2(p.108)

例 3 $n = 4$ ではサラスの公式は正しくない．正しくは $4! = 24$ 項の和だがサラスの公式を誤適用すると 8 項になってしまう．定義をそのまま使うしかない．

例 4 対角行列, 単位行列．和は $\sigma = \mathrm{e}$(恒等置換) のみ．

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$$

特に $\det(E) = 1$.

mobius　K4.2.10

ここまで来たよ

22 4.1 置換 | 第 4 章 行列式

23 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式

- ◆行列式の定義|2. 行列式
- ◆多重線形性と交代性|2. 行列式
- 面積・拡大率としての行列式

◆行列式の行多重線形性

mobius K4.2.70

定理 (行多重線形性 加藤 線形代数 定理 2-1(p.110))

A: n 次正方行列, $\boldsymbol{a}_i$ 行ベクトル, ある行 i に対して, $\boldsymbol{a}_i = k\boldsymbol{b} + \ell\boldsymbol{c}$.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ k\boldsymbol{b}+\ell\boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \ell \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

$f(x)$ の線形性 (linearity): $f(kx+\ell y) = kf(x) + \ell f(y)$ が成り立つこと.
多重線形性 (multi-linearity): $f(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \det {}^{t}[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ のどの引数についても線形性を持つこと.
証明 $i=1$ で一般性を失わない.

$$\begin{aligned} \text{左辺} =& \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)(kb_{\sigma(1)} + \ell c_{\sigma(1)}) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ =& k \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &+ \ell \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) c_{\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \text{右辺}. \end{aligned}$$

L23-Q1

Quiz(行列式の行多重線形性)

次の行列式を，行多重線形性を利用して，対角行列の行列式に帰着させて計算しよう．

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

mobius K4.2.70

◆行列式の行交代性

定理 (行列式の行交代性 加藤 線形代数 定理 2-2(p.111)**)**

A: $n \times n$ 行列,
$\boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$: A の第 i 行ベクトル

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = (-1) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

一般化 (特殊な場合 $\tau =$ 互換, として上を含む)

定理 (行列式の行の置換のもとでの変換 加藤 線形代数 定理 2-3(p.112)**)**

$\tau : \{1, \ldots, n\}$ の置換.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\tau(1)} \\ \boldsymbol{a}_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\tau(n)} \end{bmatrix} = \mathrm{sgn}(\tau) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

一般化のほうの証明

左辺の $\det B = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$ を変形して, 右辺の形に持っていく.
あえて, $\sigma(i) = \sigma\tau^{-1}\tau(i)$ と書く.

$$\det B = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma\tau^{-1}\tau(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma\tau^{-1}\tau(n)}$$

行番号 $\tau(i) = 1, 2, 3,$ で積の順をソート

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma\tau^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma\tau^{-1}(n)}$$

合成置換 $\rho = \sigma\tau^{-1}$ とおく. σ の和を ρ の和で置き換え ($\sigma \mapsto \sigma\tau^{-1}$ は置換の全単射)

$$= \sum_\rho \operatorname{sgn}(\rho\tau) a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)}$$

加藤 線形代数 定理 1-1(p.104) より

$$= \sum_\rho \operatorname{sgn}(\rho) \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)} = \text{右辺}.$$

L23-Q2

Quiz(行列式の行交代性)

次の行列 A の行列式 $\det A$ を，行の置換に対する性質 (行交代性の一般化) を利用して，対角行列の行列式と置換の符号に帰着させて計算しよう．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mobius K4.2.70

ここまで来たよ

22 4.1 置換 | 第 4 章 行列式

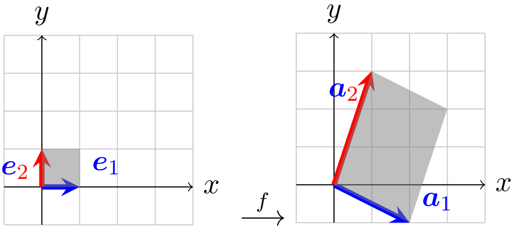
23 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式
- ◆行列式の定義|2. 行列式
- ◆多重線形性と交代性|2. 行列式
- 面積・拡大率としての行列式

2 次の行列式と面積・拡大率

加藤 線形代数 なし　2 次正方行列 A, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ は, $\boldsymbol{x}$ を $A\boldsymbol{x}$ に写す.
例 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に写る.
$\mathbb{R}^2$ の図の正方形は, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形に写る.



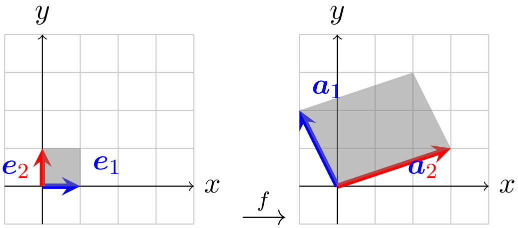
$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は?

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|\sin\theta =& \sqrt{|\boldsymbol{a}_1|^2|\boldsymbol{a}_2|^2(1-\cos^2\theta)} \\ =& \sqrt{(a_{11}^2+a_{21}^2)(a_{12}^2+a_{22}^2)-(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22})^2} \\ =& |a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}| = |\det A| = 7.\end{aligned}$$

f の拡大率は $\det A = 7$.

平行四辺形が裏返しになるとき

行入れ替え $\leftrightarrow$ x', y' 軸入れ替え.
例: $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.



f の拡大率は $\det A = -7$.
平行四辺形が裏返しに写っているとき ($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の時計回りの順番が逆になっているとき), $\det A < 0$.
平行四辺形の面積は $|\det A| = 7$.

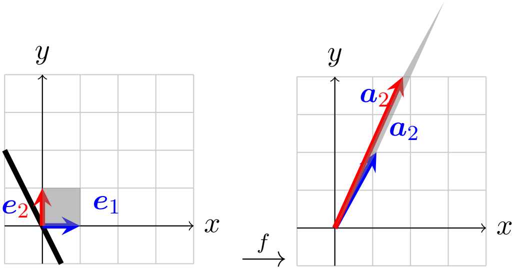
$\boxed{\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \text{ は, } \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \text{ を 2 辺とする平行四辺形の符号付き面積}}$

$\boxed{\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \text{ は, 写像 } f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \text{ の符号つき面積拡大率}}$

mobius　K4.2.30

写すと平行四辺形がつぶれるとき

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 0.$$



面積=拡大率=0.