4.3 行列式の計算 | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L25(2023-07-12 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-07-12 Wed 06:46 JST hig"

今日の目標

- 行列式を, 行基本変形で計算できる 加藤 線形代数 §4.3

ここまで来たよ

24 4.2 行列式 (の定義)2 | 第 4 章 行列式

25 4.3 行列式の計算 | 第 4 章 行列式
- ◆還元定理|3. 行列式の計算

◆還元定理

還元=reduction, 還元する=小さいものに帰着させる?

定理 (行列式の還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(p.119))

$(1,(n-1))\times(1,(n-1))$ にブロック分けされた行列 に対して，一部分が 0 であるならば，

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & * \cdots * \\ \mathbf{0} & A' \end{bmatrix} = a_{11}\det(A').$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots 0 \\ * & A' \end{bmatrix} = a_{11}\det(A').$$

証明

$\det(A) = \det({}^{\mathrm{t}}A)$ より後者だけ証明すれば十分.

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

a_{1i} は, $i = 1$ の a_{11} 以外 0. つまり $\sigma(1) = 1$ でない σ は成分の積が 0 になる. $\{2, \cdots, n\}$ の置換を σ' と書き

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma'} \operatorname{sgn}(\sigma') a_{11} a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)} \\ &= a_{11} \sum_{\sigma'} \operatorname{sgn}(\sigma') a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)} \\ &= a_{11} \times \det(A'). \end{aligned}$$

加藤 線形代数 練習 2(2)(p.102)

系 (上三角行列・下三角行列の行列式 加藤 線形代数 系 3-1(p.120))

$A = [a_{ij}]$: n 次の上三角行列のとき,

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

証明 (n に関する数学的帰納法)

- $n = 1$ のとき, $\det A = a_{11}$.
- $n = k$ **のとき正しいと仮定する.**

  $n = k + 1$ のとき, 還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(1) より, $\det A = a_{11} \det A'$.
  A' は k 次の上三角行列なので, 帰納法の過程より, $\det A' = \prod_{i=2}^{k+1} a_{ii}$.
  よって, $\det A = \prod_{i=1}^{k+1} a_{ii}$. **すなわち,** $n = k + 1$ **のときも正しい.**

下三角行列についても同様 下三角は上三角の転置だから 加藤 線形代数 定理 2-4(p.113).

対角行列は, これの特殊な場合 加藤 線形代数 例 4(p.109)　　特殊 ← 一般

基本行列の行列式

L25-Q1

基本行列の行列式 加藤 線形代数 定理 3-2(p.121)

基本行列 加藤 線形代数 p.75 の行列式を求めよう.

1. $\det(P_{ij}) =?$
2. $\det(P_i(c)) =?$
3. $\det(P_{ij}(a)) =?$

加藤 線形代数 定理 3-2(p.121)

mobius K4.2.70, mobius K4.2.90

基本変形と行列式

加藤 線形代数 定理 2-7(p.116) A, B: n 次の正方行列に対して, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) 任意の正則行列 A は基本行列 $P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ の積で $A = PP'P'' \cdots$ と書ける (どう書けるかは, 逆行列を求める過程=簡約階段形にする過程でわかる).

加藤 線形代数 定理 3-2(p.121) 基本行列の行列式

$\rightsquigarrow$ $\det A = \det P \times \det P' \times \cdots$ で求まるじゃん?

基本行列をかける ＝ 基本操作する

定理 (基本操作と行列式 加藤 線形代数 定理 3-3(p.122))

A に次の基本操作をして得た行列を B とする.

$A \overset{R,C}{\to} B$.

	基本操作	行列式	
行基本操作 R1	$ⓘ \leftrightarrow ⓙ$	$\det A =$	$(-1) \times \det B$
行基本操作 R2	$ⓘ \times \frac{1}{c}$	$\det A =$	$c \times \det B$
行基本操作 R3	$ⓙ \times a + ⓘ$	$\det A =$	$\det B$
列基本操作 C1	$\boxed{i} \leftrightarrow \boxed{j}$	$\det B =$	$(-1) \times \det B$
列基本操作 C2	$\boxed{i} \times \frac{1}{c}$	$\det A =$	$c \times \det B$
列基本操作 C3	$\boxed{j} \times a + \boxed{i}$	$\det A =$	$\det B$

L25-Q2

Quiz(行列式)

行基本変形で階段行列に直すことにより，次の行列式を求めよう．

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

あいまいさのないアルゴリズム

入力: n 次正方行列 A
行列式を $=$ でつないで計算していく. 定数倍がでたときはそれを記す.

- (逆行列を求めるのと同じ) 行基本操作 (次のページ) で簡約階段形にしていく
  - ただし, 主成分 (0 ではない) は 1 にしてもしなくてもよい
  - ただし, 主成分の上側の成分はゼロにしなくてよい
  - 主列でない列が現れたら, その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
  - 0 ばかりの行, 列, 定数倍の行, 列が現れたら, その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
- 上三角行列になった段階で, 係数かける対角成分の積を出力
- 残りの右下ブロックが 2×2, 3×3 になったら, 還元定理とサラスの公式を使ってもよい

還元定理は,「右下ブロックだけ見る」ことに相当
`https://bit.ly/redmatrix`

復習: 掃き出し法 線形代数☆演習 I(2023)L16 加藤 線形代数 pp.54–56

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ

(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 c を持っていってピボットにする

(3) 持っていった非零成分 c を R2 $①\times(1/c)$ で 1 にする

(4) R3 $①\times(-a) + ⓘ$ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の a を零にする

(10) R3 $①\times(-a) + ⓘ$ で, ブロックのその列の上側を零にする

(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う

(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

教科書お奨めの自由な計算手順

加藤 線形代数 p.123

- R1–3, C1–3, 還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(p.119) を「いい感じの順序で使って」上下三角行列や, 3×3 以下に持っていく
- 上下三角行列になったら 加藤 線形代数 系 3-1(p.120), 3×3 以下になったら 加藤 線形代数 例 1,2(pp.107-108) で計算して終了
- 途中で行列式ゼロ条件 加藤 線形代数 系 2-1(p.112), 練習 5(p.116) が満たされたら即強制終了

加藤 線形代数 例題 1, 練習 5(p.123) mobius K4.2.10

簡約階段形や逆行列を求める，と，行列を求める，との違い

求めるもの	簡約階段形，方程式の解，逆行列	行列式の値
対象	行列 $\begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$, $\left[\begin{array}{cc\|cc} \bullet & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & 1 \end{array}\right]$	行列式 $\det \begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$
つなぐもの	$\to$	$=$
許される操作	R のみ (*)	R と C
ゴール	簡約階段形	(上) 三角行列
併用できる操作		還元，展開 (来週)，サラスの公式 (3×3), 行列式が 0 になる十分条件

(*) 簡約階段形から進んで標準形 加藤 線形代数 定理 1-2(p.81) を求めるときは C も使います．

線形代数 I を通過した人は，区別して完璧に実行できるべき手順．
レポート方式の trialL26 で対比して確認します．