L01 確率変数の和

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

多変量解析☆演習 L01(2021-09-30 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-09-29 Wed 20:26 JST hig"

今日の目標

- 確率変数の和の確率関数, 確率密度関数を求められる

2 次元離散型確率変数の和

Quiz(2 次元の離散型確率変数の同時分布と周辺分布)

2 次元の離散型確率変数 X, Y の同時分布 $p(x, y)$ が次の表で与えられる

$x \backslash y$	1	2	3
4	4/32	8/32	16/32
5	3/32	1/32	0

確率変数 $S = X + Y$ の確率関数 $p_S(s)$ を求めよう.

$S = X + Y$ の確率関数 $p_{\mathrm{S}}(s)$ は?
確率 $P(S = s) = p_{\mathrm{S}}(s)$ となるべき.

$$P(S = s) \overset{\text{定義}}{=} \sum_x \sum_y \mathbf{I}_{[x+y=s]}(x, y) p(x, y)$$
$$= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x, s - x)$$

特徴関数 $\mathrm{I}_{[\text{ナントカ}]}(x)$ は, ナントカが成立するとき 1, しないとき 0.
母期待値 $\mathrm{E}[g(S)]$ を $p_{\mathrm{S}}(s)$ で求めたものと, $\mathrm{E}[g(X + Y)]$ を $p(x, y)$ で求めたものは同じ.

和の確率密度関数

離散型確率変数 X, Y の同時分布 $p(x, y)$ のとき, 和 $S = X + Y$ の確率関数は,

$$p_{\mathrm{S}}(s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} p(x, s - x).$$

2 次元連続型確率変数の和

$S = X + Y$ の確率密度関数 $f_{\mathrm{S}}(s)$ は?
確率 $P(c \le S < d) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_{[c \le s < d]}(s) f_{\mathrm{S}}(s)\,\mathrm{d}s$ となるべき.

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &\overset{\text{定義}}{=} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_{[c \le x+y < d]}(x, y) f(x, y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_{[c \le s < d]}(s) f(t, s-t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t \quad \text{変換 } s = x + y,\ t = x.\ |J| = 1
\end{aligned}
$$

よって, $f_{\mathrm{S}}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s-t)\mathrm{d}t$.
($c = -\infty$ とおいて累積分布関数 $F(d) = P(S < d)$ で話すことも)

和の確率密度関数

連続型 X, Y の確率密度関数:$f(x, y)$. 和 $S = X + Y$ の確率密度関数は,

$$
f_{\mathrm{S}}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s-x)\mathrm{d}x.
$$

たたみ込み convolution

和の確率密度関数

連続型確率密度関数が独立で, X, Y の確率密度関数 $f(x, y)$ が $f(x, y) = f_{\mathrm{X}}(x) f_{\mathrm{Y}}(y)$ と書けるとき, 和 $S = X + Y$ の確率密度関数 $f_{\mathrm{S}}(s)$ は,

$$f_{\mathrm{S}}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{X}}(x) f_{\mathrm{Y}}(s - x) \mathrm{d}x.$$

この右辺の積分を, 2 つの関数 $f(x), g(y)$ のたたみ込み合成積 convolution といい, $(f * g)(s)$ と書くことがある.
合成積 $(f * g)$ のフーリエ変換は, f, g のフーリエ変換の積　フーリエ解析

L01-Q1

Quiz(2 つの連続型確率変数の和の分布)

連続型確率変数 X, Y は独立で，同分布 $\mathrm{U}(1, 7)$ にしたがう．すなわち確率密度関数は

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (1 \leq x < 7) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

和 $S = X + Y$ の確率密度関数を求めよう．

L01-Q2

Quiz(2 つの連続型確率変数の和の分布)

連続型確率変数 X, Y は同時分布

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{18} & (0 \leq x < 6, 0 \leq y < 6 - x) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

にしたがう.
和 $S = X + Y$ の確率密度関数を求めよう.