

# 多変量正規分布

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

多変量解析☆演習 L03(2026-10-08 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2026-10-08 Thu 18:20 JST hig"

## 今日の目標

- 多変量正規分布の確率密度関数，母平均値，母共分散の関係を説明できる 久保川 統計学入門 §6.4
- 多変量正規分布のアフィン変換による母平均値，母共分散の変換を説明できる



## 予告編：多変量正規分布をプレビュー

### 定義 (2次元正規分布)

連続型確率変数  $X, Y$  が、次の形 (指数関数の肩が  $x, y$  の2次式) の同時確率密度関数を持つとき、 $X, Y$  は2次元正規分布にしたがうという。

$$f(x, y) = C \cdot e^{-ax^2 - by^2 + cx + py + qy}$$

### 定義 (一般の $n$ 次元正規分布)

連続型確率変数  $Y_1, \dots, Y_n$  が、次の形 (指数関数の肩が2次式) の同時確率密度関数を持つとき、 $Y_1, \dots$  は  $n$  次元正規分布にしたがうという。

$$f(\mathbf{y}) = f(y_1, \dots) = C \cdot e^{-a_1 y_1^2 - a_2 y_2^2 - \dots + c_{12} y_1 y_2 + c_{13} y_1 y_3 + \dots + c_{n-1, n} y_{n-1} y_n + d_1 y_1 + \dots + d_n y_n}$$

$a, b > 0, d, \dots$  と  $C$  は、ある条件を満たし、母平均値母分散母共分散と関係する母数。

どちらも、後から行列とベクトルで美しい形で書く。

## ここまで来たよ

### 3. 多変量正規分布

- 独立な  $n$  次元正規分布
- 2次元正規分布 ( $X, Y$  が独立でない)

## 各変数が独立な正規分布

例として、線形重回帰モデル

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i$$

で、 $\mu_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip}$  とおくと、

$$\leadsto y_1 = \mu_1 + \epsilon_1$$

$$\vdots$$

$$y_n = \mu_n + \epsilon_n$$

$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$  は独立同一分布.

$y_1, \dots, y_n$  の同時分布は、

$$f(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (y_i - \mu_i)^2}$$

しばらく  $n = 2$  で観察

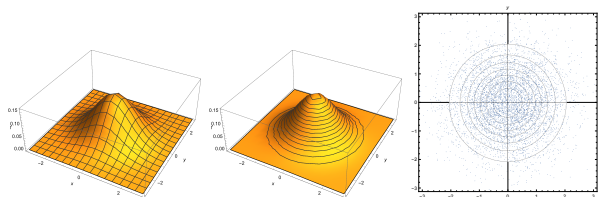
$y_1 = x, y_2 = y, \mu_1 = \mu_X, \mu_2 = \mu_Y$  とおくと,

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma^2}} \times \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma^2}}.$$

$X, Y$  は、同一分布でないが、互いに独立  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$  なので,

$$\text{周辺分布 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma^2}}$$

$x$  または  $y$  方向から見ると 1 変数の正規分布.



$E[X] = \mu_X, E[Y] = \mu_Y,$   
 $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \sigma^2$   
 母共分散  $\text{Cov}(X, Y) = 0$

$f$  の等高線は中心  $(\mu_X, \mu_Y)$  の円.

## ベクトル記法の導入

確率変数ベクトル  $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}$ , 母数ベクトル  $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}$ .

記法母平均値  $E[\mathbf{Y}] = \begin{pmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{pmatrix} = \boldsymbol{\mu}$

定義 (母分散・共分散行列)

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(Y, X) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix}$$

$\text{Var}(X) = \text{Cov}(X, X)$  と考える.

今の場合,  $\text{Cov}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 E$ . 確率密度関数は次のように書ける  
( $n = 2$ .  $\sigma$  は人為的に見えるよね)

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det(\sigma^2 E))^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^\top (\sigma^2 E)^{-1} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})}$$

これを,  $\mathbf{Y}$  は 2 次元正規分布  $N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 E)$  にしたがう, という.

行列式  $\det$  石村畑 §3

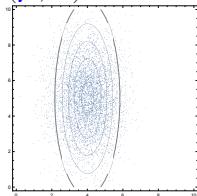
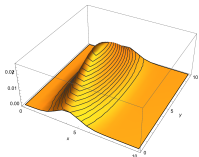
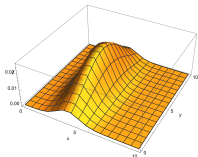
## 分散の異なる独立な正規分布

$X, Y$  は独立だが、どうせ同一分布でないので、母分散もそれぞれの値にしよう.  $\Sigma = \text{Cov}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(Y, X) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$  とすると,  $n = 2$  として,

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi\sigma_X^2)^{1/2}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} \times \frac{1}{(2\pi\sigma_Y^2)^{1/2}} e^{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}$$

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{-n/2} (\det \Sigma)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})}$$

これを,  $\mathbf{Y}$  は 2 次元正規分布  $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  にしたがる, という.



$f$  の等高線は, 中心  $(\mu_X, \mu_Y)$ , 2 軸が  $\sigma_X, \sigma_Y$  に比例する楕円.

## L03-Q1

## Quiz(2 次元正規分布)

次の 2 変数確率密度関数は 2 次元正規分布を定める.

$$f(x, y) = C \cdot e^{-4x^2 - \frac{1}{6}y^2 + 2y}.$$

- ①  $X, Y$  の母平均値, 母分散, 母共分散を求めよう.
- ②  $E[1] = 1$  が満たされるように定数  $C$  を定めよう.

略解

- ① 指数関数の引数を平方完成する.

$$\begin{aligned}
 & -4x^2 - \frac{1}{6}y^2 + 2y \\
 &= -\frac{1}{2}(8x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 4y) \\
 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{(x-0)^2}{(1/2\sqrt{2})^2} + \frac{(y-6)^2}{(\sqrt{3})^2} - 12\right)
 \end{aligned}$$

より,  $E[X] = 0, E[Y] = 6, \text{Var}(X) = \frac{1}{8}, \text{Var}(Y) = 3, \text{Cov}(X, Y) = 0$ .

- ②  $f(x, y)$  は次の 2 つの形に書ける.

$$C \cdot e^{-\frac{(x-0)^2}{2(1/2\sqrt{2})^2} - \frac{(y-6)^2}{2(\sqrt{3})^2}} e^{-\frac{1}{2}(-12)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1/8)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3}} e^{-\frac{(x-0)^2}{2(1/2\sqrt{2})^2} - \frac{(y-6)^2}{2(\sqrt{3})^2}}$$

であるべきだから,  $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1/8)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3}} e^{-6}$ .

## 拡大縮小平行移動の下での母期待値・母分散の変換

拡大縮小平行移動  $X' = aX + b$  のもとで,  
 $E[X'] = aE[X] + b, \text{Var}(X') = a^2\text{Var}(X)$  だった.  
 独立な  $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$  それぞれに適用すると?

石村畑 §5.6 線形変換  $A$  と平行移動  $\mathbf{b}$  を組み合わせたアフィン変換

$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{b}$  は同様に考えられる.

命題 (確率変数の拡大縮小平行移動による変換)

$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  のとき. 確率変数  $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 Y_1 + b_1 \\ a_2 Y_2 + b_2 \end{pmatrix}$  について, (後で成り立つようにわざとらしく)

$$E[A\mathbf{Y} + \mathbf{b}] = AE[\mathbf{Y}] + \mathbf{b}, \text{Cov}(A\mathbf{Y} + \mathbf{b}) = A\text{Cov}(\mathbf{Y})A^\top.$$

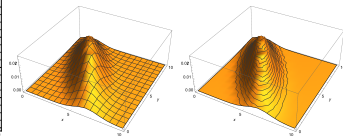
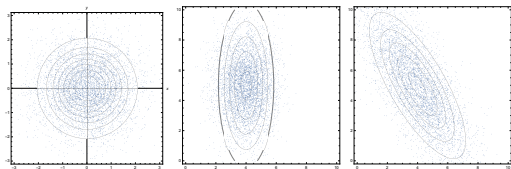
正規分布の場合 標準正規分布  $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, E)$  のとき,  $\mathbf{Y} = A\mathbf{Z} + \mathbf{b}$  の確率密度関数は,  $f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi a_1^2)^{1/2}} e^{-\frac{(y_1 - b_1)^2}{2a_1^2}} \frac{1}{(2\pi a_2^2)^{1/2}} e^{-\frac{(y_2 - b_2)^2}{2a_2^2}}$

## ここまで来たよ

### 3. 多変量正規分布

- 独立な  $n$  次元正規分布
- 2次元正規分布 ( $X, Y$  が独立でない)

## 等高線が傾いた楕円の分布も作りたい!



独立じゃなくしたいから,  $f(x), f(y)$  に因数分解できないように, 指数関数の引数に  $xy$  の項でもいれておけば?

## 一般の2次元正規分布

$$f(x, y) = C \times e^{-ax^2 - by^2 + cxy + px + qy}$$

定義 (一般の2次元正規分布の同時確率密度関数)

$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  とは、確率密度関数が次のようになること.

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})}$$

$$\text{母平均値 (ベクトル)} \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix} \stackrel{\text{要証明}}{=} \begin{pmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{pmatrix}$$

$$\text{母共分散行列} \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{要証明}}{=} \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix} = \text{Cov}(\mathbf{Y})$$

- たしかに正規分布
- $\text{Cov}(X, Y) = 0$  のとき独立なケースに帰着.
- 平面上の重積分が収束する必要  $\leadsto \Sigma^{-1}$  の固有値 石村畑 §6.3 はすべて正である必要.

母相関係数  $r$ , 共分散行列  $\Sigma$ .  $c = \frac{9\sqrt{21}}{10}$

$r = -0.90$

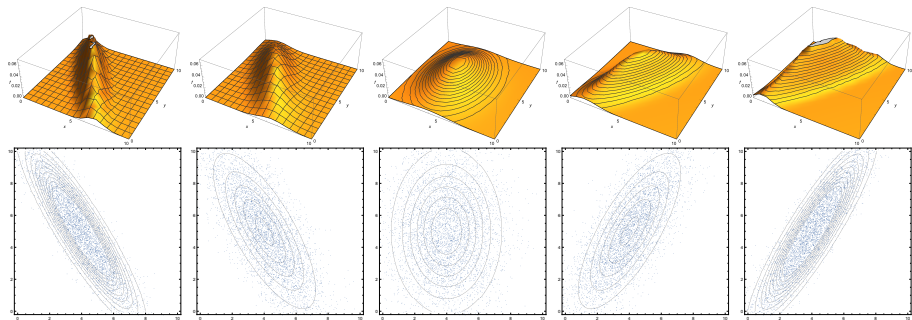
$-0.76$

$0$

$+0.76$

$+0.90$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -c \\ -c & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & +2\sqrt{3} \\ +2\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & +c \\ +c & 7 \end{pmatrix}$$



## 定義 (一般の多変量正規分布の同時確率密度関数)

$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  ( $n$  次元正規分布) とは, 確率密度関数が

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \Sigma)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})}$$

$$\text{母平均値 (ベクトル)} \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{要証明}}{=} \begin{pmatrix} E[Y_1] \\ \vdots \\ E[Y_n] \end{pmatrix}$$

母共分散行列

$$\Sigma = (\Sigma_{ij}) \stackrel{\text{要証明}}{=} \begin{pmatrix} \text{Var}(Y_1) & \text{Cov}(Y_1, Y_2) & \cdots & \text{Cov}(Y_1, Y_n) \\ \text{Cov}(Y_2, Y_1) & \text{Var}(Y_2) & \cdots & \text{Cov}(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(Y_n, Y_1) & \text{Cov}(Y_n, Y_2) & \cdots & \text{Var}(Y_n) \end{pmatrix}$$

$y_1$  の重積分が収束する必要  $\leadsto \Sigma^{-1}$  の固有値 石村畑 §6.3 はすべて正の必要.

## L03-Q2

## Quiz(2次元正規分布の確率密度関数)

確率変数  $X, Y$  は2次元正規分布にしたがい,  $E[X] = -4, E[Y] = 5$ ,  $\text{Var}(X) = 2, \text{Var}(Y) = 3, \text{Cov}(X, Y) = -1$  を満たす.

同時確率密度関数  $f(x, y)$  を (行列やベクトルを使わずに) 具体的に求めよう.

## 略解

母分散行列  $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

$\det \Sigma = 5, \Sigma^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  より,

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{2/2} \cdot 5} e^{-\frac{1}{2} \frac{3}{5} (x+4)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{5} (x+4)(y-5) - \frac{1}{2} \frac{2}{5} (y-5)^2}.$$

## 確率密度関数から母ナントカ I

L03-Q3

### Quiz(2次元正規分布)

次の2変数確率密度関数は2次元正規分布を定める.

$$f(x, y) = C \cdot e^{-x^2 + 4xy - 7y^2}.$$

- ① 母平均値, 母共分散行列を求めよう.
- ②  $E[1] = 1$  が満たされるように定数  $C$  を定めよう.

略解

## 確率密度関数から母ナントカ II

- ① 指数関数の引数の2次式を対称行列を用いて書く.  $x, y$  の1次の項はないので,  $E[X] = E[Y] = 0$  であり,

$$-x^2 + 4xy - 7y^2 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-0 & y-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \frac{1}{2 \cdot 14 - (-4)(-4)} \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

- ②  $f(x, y) = Ce^{-x^2+4xy-7y^2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{x}}$ . よって  $C = \frac{1}{2\pi\sqrt{1/12}}$ .

2次形式の標準化 (線形代数 I)

石村畑 §6.6