離散型確率変数

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習　L06(2020-11-02 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2020-11-06 Fri 11:24 JST hig"

今日の目標

- 離散型確率変数とは何か説明できる 岩薩林 確率・統計 §3.1
- 離散型確率変数の確率, 母平均値, 母分散, 母標準偏差, 母期待値が計算できる 岩薩林 確率・統計 §3.2

L05-Q1

Quiz 解答:回帰係数と回帰直線

$y+4=\frac{-25\sqrt{36}}{\sqrt{49}\sqrt{36}\sqrt{49}}\times(x-9).$

ここまで来たよ

5 回帰分析

6 離散型確率変数

- 事象と確率
- 離散型確率変数
- 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

高校の確率

文章から確率を求める問題 高校 数学 A

トランプを 1 枚, 同じ確からしさで引く.

結果	確率
$\heartsuit 1$	$\frac{1}{52}$
$\heartsuit 2$	$\frac{1}{52}$
$\vdots$	$\vdots$
$\spadesuit 13$	$\frac{1}{52}$
計	1

偶数のカードのでる確率は? $\frac{24}{52}$.

事象と確率 高校 数学 A 岩薩林 確率・統計 §2.1

集合の言葉で. 集合位相

試行 (トランプから 1 枚引く) を行うと根源事象 ($\heartsuit 1$ がでる) のどれか 1 つが起きる.

標本空間 $\Omega = \{\heartsuit 1, \ldots, \spadesuit K\}$ すべての根源事象を集めた集合.

事象

部分集合 $A = \{$ カード 1, カード 2, $\ldots\} = \{$ カード $x |$ 条件 $a(x)\} \subset \Omega$.

全事象 $\Omega \subset \Omega$.

空事象 $\emptyset \subset \Omega$.

補事象 $A^{c} = \Omega \setminus A$. A が起きなかったという事象.

和事象 $A \cup B$ ‘または’.

積事象 $A \cap B$ ‘かつ’.

排反事象 「A, B が排反事象」 $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. 同時に起きない.

事象の確率

「事象 A の確率」 $= P(A) = P(a(X)) =$ 「条件 $a(X)$ が成立する確率」

$\Omega =$(トランプ全体) のとき,

- ($\heartsuit$がでるという事象の確率) $= P(\{\heartsuit 1, \ldots, \heartsuit K\}) = P(X$ が$\heartsuit)$
- ($\heartsuit 1$ がでるという事象の確率) $= P(\{\heartsuit 1\}) = P(X$ が$\heartsuit 1)$
- (X 黒札がでるという事象の確率) $=$ $P(\{\clubsuit 1, \ldots, \clubsuit K, \spadesuit 1, \ldots, \spadesuit K\}) = P(X$ が黒札$)$

Ω が有限集合で, 等しく確からしい, なら, P は集合の位数の比 高校 数学 A
授業時間中にはやらないこと

- 確率の公理 $\boxed{\text{岩薩林 確率・統計 §2.2}}$
- 確率に関する基本的定理 $\boxed{\text{岩薩林 確率・統計 §2.2}}$

この授業ではやらないこと 測度 (measure), 測度空間, dx $\rightsquigarrow$ ルベーグ積分

ここまで来たよ

5 回帰分析

6 離散型確率変数
- 事象と確率
- 離散型確率変数
- 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

離散型確率変数 岩薩林 確率・統計 §3.1

高校数学でよく見る確率の問題 高校 数学 A

袋に赤玉 2 個, 白玉 3 個がはいっている. いちどに 3 個取り出したとき, 赤玉が x 個である確率は ?

X が確率変数.
X は離散型確率変数 離散型 $\approx$ 整数値
易しく言ったら, $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$. この元が x.

前回までとの関係

トランプ 1 セット $\neq$ なんとか坂
アイドル作成ゲームで, 新しいメンバーをスカウトする ボタンを押したら, CPU 内部でサイコロが振られて (=確率) 身長体重が決まって…を 49 回繰りかえしたら, 49 個からなる 2 変量データができた, みたいな関係. 推測統計まで行ったときに明らかになります.

x_k	確率 $p_k = p(x_k) = P(X = x_k)$
$\vdots$	0
-1	0
0	$\frac{1}{10} = \frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}$
1	$\frac{6}{10} = \frac{2 \cdot 3}{{}_5\mathrm{C}_3}$
2	$\frac{3}{10} = \frac{1 \cdot 3}{{}_5\mathrm{C}_3}$
3	0
$\vdots$	0
計	1

言葉 確率分布 (確率関数)

岩薩林 確率・統計 (3.1)p.49

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & (x = 0) \\ \frac{6}{10} & (x = 1) \\ \frac{3}{10} & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$p_k = p(x_k)$.

確率分布の性質

$0 \le p(x) \le 1$. $\sum_x p(x) = 1$.

高校の確率の問題と, 大学の (ここの) 確率の問題の違い

高校 数学 A ではこの表を作るまでを考える

高校 数学 B, 確率統計☆演習 I ではこの表ができて与えられた後を考える. ‘この表のとき, 赤玉の個数の母期待値は?’

ここまで来たよ

5 回帰分析

6 離散型確率変数
- 事象と確率
- 離散型確率変数
- 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

関数 $g(x)$ の母期待値 $\mathrm{E}[g(X)]$ 高校 数学 AB 岩薩林 確率・統計 §3.2(3.3)p.52

関数 $g(x)$ の母期待値 $\mathrm{E}[g(X)]$

離散型確率変数 X が確率分布 $p(x) = \cdots$ に従うとき,

$$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) \times p(x)$$

g は普通の関数. 例: $g(x) = x^2, \mathrm{e}^x$, (場合分けで書かれた関数), ...

性質

$\mathrm{E}[1] = 1$. ($g(x) = 1$ と $\sum_x p(x) = 1$ から)

特に名前のついた量 (「母」で前回までと区別) 岩薩林 確率・統計 §3.2(p.54)

- 母平均値 $\mu \overset{\text{定義}}{=} \mathrm{E}[X]$. ($g(x) = x$ ってこと). (x の) 母期待値ともいう
- 母分散 $= \mathrm{V}[X] \overset{\text{定義}}{=} \mathrm{E}[(X-\mu)^2]$. ($g(x) = (x-\mu)^2$ ってこと)
- 母標準偏差 $\overset{\text{定義}}{=} \sqrt{\mathrm{V}[X]}$

事象の確率 岩薩林 確率・統計 なし

$A = \{x | a(x)\} \subset \Omega$ のとき,
事象 A の確率 $P(A) =$ 条件 $a(X)$ が成立する確率 $P(a(X))$ は,

事象の確率

$$P(A) = P(a(X)) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[a(X)]}(X)] \tag{P1}$$

ここで,

特徴関数

$$\text{特徴関数 } \mathrm{I}_{[a(X)]}(x) = \begin{cases} 1 & (a(x) \text{ が真}) \\ 0 & (a(x) \text{ が偽}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{例}}$ $x \in \mathbb{Z}$ のとき,

$$\mathrm{I}_{[X^2 \leq 4]}(x) = \begin{cases} 1 & (-2 \leq x \leq 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L06-Q1

Quiz(離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差)

整数に値をとる離散型確率変数 X は次の確率分布に従う.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{12} & (x = -1) \\ \frac{5}{12} & (x = 0) \\ \frac{3}{12} & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^X]$ を求めよう.
2. X の母平均値を求めよう.
3. X の母分散を求めよう.
4. X の母標準偏差を求めよう.
5. 事象 $X \leq 1$ の確率を求めよう.

計算を楽にする母期待値，母分散の性質

モーメント $\mathrm{E}[X^k](g(x)=x^k)$ を部品として計算しておいて，他の母期待値はなるべく下の性質から導くのが楽．

母期待値の性質 高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 (3.5)(3.6)p.54

X: 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$:定数 のとき，

$$\mathrm{E}[1] = 1 \tag{E1}$$

$$\mathrm{E}[g_1(X)+g_2(X)] = \sum_x (g_1(x)+g_2(x)) \times p(x) = \mathrm{E}[g_1(X)] + \mathrm{E}[g_2(X)] \tag{E2,(3.5)}$$

$$\mathrm{E}[a\cdot g(X)] = \sum_x (ag(x)) \times p(x) = a\mathrm{E}[g(X)] \tag{E3}$$

$$\mathrm{E}[aX+b] \overset{\mathrm{E2}}{=} \mathrm{E}[aX] + \mathrm{E}[b] \overset{\mathrm{E3}}{=} a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[1] \overset{\mathrm{E1}}{=} a\mathrm{E}[X] + b \tag{E4,(3.6)}$$

$g(X)$ の母期待値 = ($Y = g(X)$ の母平均値) 岩薩林 確率・統計 p.52

$g(X) = Y$ とおくとき,

$$\mathrm{E}[g(X)] = \mathrm{E}[Y]$$

どちらの辺で計算しても同じ. 前のスライドの性質が使えるなら, 左辺のほうが楽.

例 $Y = 2X + 3$.

x	確率	$y = g(x)$	確率
0	$p(0)$	3	$p_{\mathrm{Y}}(3) = p(g(0))$
1	$p(1)$	5	$p_{\mathrm{Y}}(5) = p(g(1))$
2	$p(2)$	7	$p_{\mathrm{Y}}(7) = p(g(2))$
$\vdots$			

下の性質は, $\mathrm{V}[X]$ から $\mathrm{E}[X^2]$, および逆方向に計算するのに使う.

母分散の性質 高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 (3.8)p.55

$$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 \tag{V1,(3.8)}$$

モーメント $\mathrm{E}[X^1]$,$\mathrm{E}[X^2]$, 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を計算しておいて, 他の母分散は下の性質から導くのが楽.

母分散の性質 高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 (3.9)p.55

X: 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$:定数 のとき,

$$\mathrm{V}[aX + b] = a^2\mathrm{V}[X]. \tag{V2,(3.9)}$$

使うな危険

Example (母期待値のよくある間違い)

$$\mathrm{E}[X \times X] \neq \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[X]$$

$$一般に\ \mathrm{E}[g(X)] \neq g(\mathrm{E}[X])$$

$\sin(x \cdot x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$ ですか?
$\sin(\sqrt{x}) = \sqrt{\sin(x)}$ ですか?

Example (母分散のよくある間違い)

$$\mathrm{V}[aX + b] \neq a\mathrm{V}[X] + b$$

$$\mathrm{V}[X + X] \neq \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[X]$$

V2 の $a^2\mathrm{V}[X]$ と一致しない
V2 の $2^2\mathrm{V}[X]$ と一致しない

L06-Q2

Quiz(確率変数の変換)

確率変数 X の母期待値, 母分散は次を満たす.

$$\mathrm{V}[X] = 9, \quad \mathrm{E}[X] = 2.$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[-X^2 + 2X - 3]$ を求めよう.
2. 確率変数 $Y = -2X - 3$ の母分散 $\mathrm{V}[-2X - 3]$ を求めよう.

L06-Q3

岩薩林 確率・統計 例 6(p.52), 例題 3.1(p.53)

L06-Q4

岩薩林 確率・統計 第 3 章演習問題 1