正規分布

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習　L10(2020-12-07 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2020-12-16 Wed 07:50 JST hig"

今日の目標

- 正規分布の母平均値・母分散・確率が積分や表や数式処理で求められる 岩薩林 確率・統計 §4.5

L09-Q1

Quiz 解答:連続型確率変数

1. k 次のモーメントは,
$$\mathrm{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} x^k 8x\,\mathrm{d}x = \frac{2^3 \cdot 2^{-k-2}}{k+2}.$$
$\mathrm{E}[X^0] = 1$ が確認できる.
2. $\mathrm{E}[X^1] = \frac{1}{3}$.
3. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X^1]^2 = \frac{1}{8} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{72}$.
4. $\mathrm{E}[(2X+3)^2] = 4\mathrm{E}[X^2] + 6\mathrm{E}[X^1] + 9\mathrm{E}[X^0] = 4 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{3} + 9 = \frac{23}{2}$.
5. $\mathrm{V}[2X+3] = 2^2\mathrm{V}[X] = 4(\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X^1]^2) = 4(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}) = \frac{1}{18}$.

6.

$$
\begin{aligned}
&P(|4X| \leq 1) \\
=&\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[|X| \leq \frac{1}{4}]}(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_{[-\frac{1}{4} \leq X \leq +\frac{1}{4}]}(x) f(x)\, \mathrm{d}x \\
=&\int_{-\infty}^{-\frac{1}{4}} 0 \cdot 0\, \mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{4}}^{0} 1 \cdot 0\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{4}} 1 \cdot 8x\, \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 0 \cdot 8x\, \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} 0 \\
=&0 + 0 + \tfrac{1}{4} + 0 + 0.
\end{aligned}
$$

L09-Q2

Quiz 解答:連続型一様分布

$\mathrm{E}[X^k] = \frac{1}{d-c} \int_c^d x^k\, \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1} \frac{d^{k+1}-c^{k+1}}{d-c}$.

1. $\mathrm{E}[X^1] = \frac{c+d}{2}$.
2. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X^1]^2 = \frac{(d-c)^2}{12}$. $\sqrt{\mathrm{V}[X]} = \frac{d-c}{\sqrt{12}} \simeq \frac{d-c}{3.5}$.

L09-Q3

Quiz 解答:連続型一様分布の母期待値

$\mathrm{E}[X] = \frac{-1+1}{2} = 0, \mathrm{V}[X] = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{1}{3}$

1. $\mathrm{E}[2X+4] = 2 \cdot 0 + 4.$
2. $\mathrm{V}[2X+4] = 2^2 \times \frac{1}{3}.$
3. $2X+4 > 5 \Leftrightarrow X > \frac{1}{2}.$ $P(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$

別解 $Y = 2X + 4 \sim \mathrm{U}(2, 6)$ なので,

1. $\mathrm{E}[Y] = \frac{2+6}{2} = 4.$
2. $\mathrm{V}[Y] = \frac{(6-2)^2}{12} = \frac{1}{3}.$
3. 面積の比を考えて, $P(Y > 5) = \frac{6-5}{6-2} = \frac{1}{4}.$

ここまで来たよ

9 連続型確率分布

10 正規分布

- 標準正規分布
- 一般の正規分布

一般の正規分布 normal distribution 高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 §4.5(4.23)

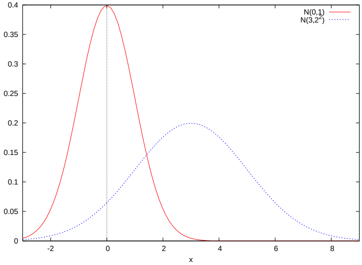
(一般の) 正規分布 $\mathrm{N}(b, a^2)$ の確率密度関数

$$f(x; b, a^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}.$$

b, a^2:パラメタ ($a > 0$).

https://www.geogebra.org/#probability

https://ja.wolframalpha.com⇝ 正規分布



⇝ 正規分布

Excel norm.dist

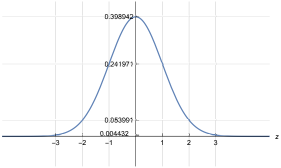
標準正規分布 standard normal distribution $\mathrm{N}(0, 1^2)$ の性質

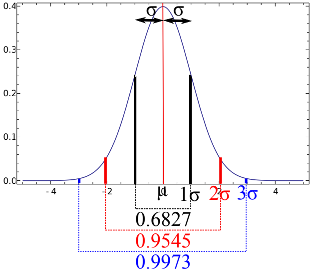
難しいので，まず $b = 0, a = 1$ の場合を考える．
あるいは，a 倍，b だけ平行移動する前のものを考える．

標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ の確率密度関数 岩薩林 確率・統計 (4.17)

$$f(z; 0, 1^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Excel で，=norm.s.dist(z,FALSE)





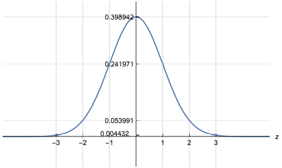
標準正規分布は $\mu = 0, \sigma = 1$

標準正規分布の母期待値

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$
k 次のモーメント (k:自然数)

$$\mathrm{E}[Z^{2k-1}] = 0, \quad \text{奇関数}$$
$$\mathrm{E}[Z^{2k}] = (2k-1)!!$$
$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)$$

置換積分



母平均値 $\mathrm{E}[Z] = 0,$ 岩薩林 確率・統計 (4.20) 奇関数

全確率 $\mathrm{E}[Z^0] = 1,$ 岩薩林 確率・統計 (4.19) 微積分 II

母分散 $\mathrm{V}[Z] = 1$ 岩薩林 確率・統計 (4.21)

標準正規分布の確率と $I(z)$ の数表

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ のとき,

$$P(c < Z < d) = \int_c^d f(z'; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z' = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z'^2}{2}}\,\mathrm{d}z'$$

岩薩林 確率・統計 (4.22)

不定積分は, 簡単な関数では書けない. そこで,

$$I(z) \stackrel{\text{定義}}{=} \int_0^z f(z'; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z'$$

とおき,

$$\begin{aligned}\int_c^d f(z; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z &= \int_c^0 f(z; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z + \int_0^d f(z; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z \\ &= -I(c) + I(d)\end{aligned}$$

と書く. $I(z)$ は表になってる. 岩薩林 確率・統計 付表 1(p.227)

`https://www.geogebra.org/classic#probability`

$I(z)$ の数表 岩薩林 確率・統計 付表 1(p.227)

表 岩薩林 確率・統計 付表 1(p.227) は, 紙の節約のため, $I(z)$ $(z \geq 0)$ しかないが, それだけで十分.

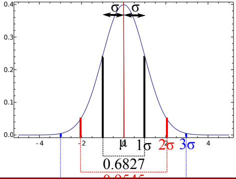
$I(z)$ $(0 < z < +\infty)$ ですべて書ける.

$I(z)$ の性質

- $f(z; 0, 1^2) > 0$ より $I(z)$ は単調増加.
- $f(z; 0, 1^2)$ が偶関数より, $I(z)$ は奇関数: $I(-z) = -I(z), I(0) = 0.$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z; 0, 1^2)\, \mathrm{d}z = 1$ より, $I(+\infty) = \frac{1}{2} = -I(-\infty).$

Excel では $I(z)$=`norm.s.dist(z,TRUE)-0.5`

上側確率 $Q(z) = \frac{1}{2} - I(z)$ の表を載せてる教科書も多い.



L10-Q1

Quiz(標準正規分布の確率)

Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$ に従う連続型確率変数である.

1. 確率 $P(Z<0)$ を $Q(z)$ または $I(z)$ (ただし $0<z<+\infty$) の 1 次式または定数として表そう. 表を利用して小数として求めよう.
2. 確率 $P(-0.56<Z<+1.23)$ を $Q(z)$ または $I(z)$ (ただし $0<z<+\infty$) の 1 次式または定数として表そう. 表を利用して小数として求めよう.

岩薩林 確率・統計 例題 4.9(p.91), 問題 8(p.92), 問題 10(p.96)

ここまで来たよ

ふたたび一般の正規分布 $\mathrm{N}(b, a^2)$

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ に対して，$X = aZ + b$ を考える．$Z = \frac{X-b}{a}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X^0] &= 1, \quad \text{微積分 II} \\ \mu = \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[aZ+b] = b, \\ \sigma^2 = \mathrm{V}[X] &= \mathrm{V}[aZ+b] = a^2, \quad \text{微積分 II} \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \rightsquigarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$$

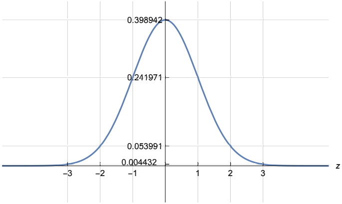
X は，$\mathrm{N}(b, a^2)$ にしたがい，母平均値 b，母分散 a^2.

(一般の) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

母平均値 $\mathrm{E}[X] = \mu$，母分散 $\mathrm{V}[X] = \sigma^2$ の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は，

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ のとき, $X = aZ + b$ は,
$\mathrm{E}[X] = b, \mathrm{V}[X] = a^2, X \sim \mathrm{N}(a \cdot 0 + b, 1^2 \cdot a^2)$.



$$f(x; 0, 1^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

一般に正規分布は拡大縮小平行移動しても正規分布 (こういう性質は連続一様分布と正規分布くらい).

正規分布の 1 次式による変換 岩薩林 確率・統計 (4.24)

$X \sim \mathrm{N}(\beta, \alpha^2)$, $Y = aX + b$ のとき, $Y \sim \mathrm{N}(a\beta + b, \alpha^2 \cdot a^2)$.

L10-Q2

Quiz(正規分布の確率)

連続型確率変数 X は, 確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-4)^2}{2\cdot 3^2}}$$

にしたがう.

1. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. $f(x)$ のグラフを描こう.

`https://ja.wolframalpha.com` でつぎのように入力してグラフを描いてみよう.

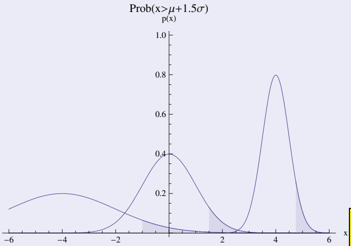
`1/sqrt(2*pi*1)e^(-x^2/2), 1/sqrt(2*pi*3^2)e^(-(x-4)^2/(2*3^2))`

正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ の確率の求め方 I

一般の正規分布の確率

$X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ の確率は, 標準化 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1^2)$ して求める.

$$P(c<X<d)=P(\tfrac{c-\mu}{\sigma}<\tfrac{X-\mu}{\sigma}<\tfrac{d-\mu}{\sigma})=P(\tfrac{c-\mu}{\sigma}<Z<\tfrac{d-\mu}{\sigma})$$



斜線部の面積はどれも同じ

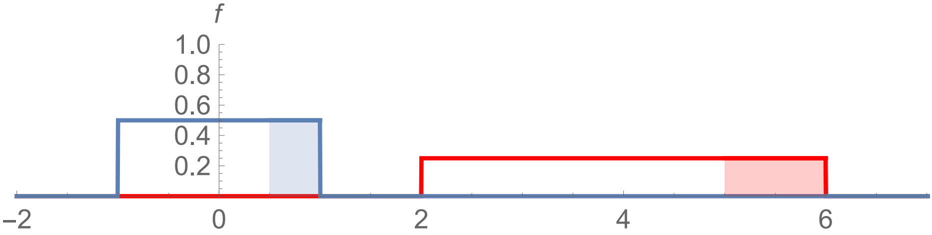
確率変数の標準化 岩薩林 確率・統計 例題 4.4(p.80)

任意の確率変数 X に対して, $\mu = \mathrm{E}[X], \sigma^2 = \mathrm{V}[X], \sigma > 0$ とする.
確率変数 Z を $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ と定めると, $\mathrm{E}[Z] = 0$, $\mathrm{V}[Z] = 1$ となる.

Z は標準化された確率変数

$Y \sim \mathrm{U}(2,6)$ を標準化すると, $Z = \dfrac{Y - \frac{2+6}{2}}{\frac{6-2}{\sqrt{12}}} = \dfrac{Y-4}{4/\sqrt{12}} \sim \mathrm{U}(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$.

$X \sim \mathrm{U}(c,d)$ を標準化すると,$Z \sim \mathrm{U}(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$



左から $X \sim \mathrm{U}(-1,1)$, $Y = aX + b = 2X + 4 \sim \mathrm{U}(2,6)$.

標準化しても確率が同じことの別説明 (置換積分)

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ のとき, 積分で $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $\mathrm{d}z = \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}x$ とすると,

$$
\begin{aligned}
P(c < X < d) &= \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\color{blue}{\sigma^2}}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\, \color{blue}{\sigma}\mathrm{d}z \\
&= P\left(\frac{c-\mu}{\sigma} < Z < \frac{d-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

L10-Q3

Quiz(正規分布の確率)

確率変数 $X \sim \mathrm{N}(3, 2^2)$ とする.

1. 確率密度関数とそのグラフを答えよう.
2. 母期待値 $\mathrm{E}[X^2]$ を求めよう.
3. $P(X \geq 5)$ を, $I(z) = \int_0^z f(z'; 0, 1^2)\mathrm{d}z'$ (ただし $0 < z < +\infty$) で書こう. さらに, 表を使って小数で書こう.
4. $P(+1 \leq X \leq 7)$ を $I(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で書こう. さらに, 表を使って小数で書こう.
5. $P(+3 \leq X \leq 7)$ を $I(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で書こう. さらに, 表を使って小数で書こう.

岩薩林 確率・統計 §4.5 例題 4.10,4.11, 問題 10, 第 4 章練習問題 5