

連続型確率変数

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L02(2021-04-14 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2021-04-14 Wed 07:44 JST hig"

今日の目標

- 離散型確率変数の確率が計算できる 岩薩林 確率・統計 §3.2
- 連続型確率変数とは何か説明できる 岩薩林 確率・統計 §3.3
- 連続型確率変数の母期待値母平均値母分散が計算できる 岩薩林 確率・統計 §3.3



L01-Q1

Quiz 解答:離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差

- ① 母期待値 $E[e^X] = \frac{4}{12} \cdot e^{-1} + \frac{5}{12} \cdot e^0 + \frac{3}{12} \cdot e^2$.
- ② 母平均値 $E[X] = \frac{4}{12} \cdot (-1) + \frac{5}{12} \cdot 0 + \frac{3}{12} \cdot 2 = \frac{1}{6} (= \mu)$.
- ③ 母分散 $E[X^2] = (-1)^2 \cdot \frac{4}{12} + 0^2 \cdot \frac{5}{12} + 2^2 \cdot \frac{3}{12} = \frac{4}{3}$.

$$V[X] \stackrel{V1}{=} E[X^2] - \mu^2 = \frac{47}{36}.$$

別解:

$$V[X] = E[(X - \mu)^2] = \frac{4}{12} \cdot (-1 - \frac{1}{6})^2 + \frac{5}{12} \cdot (0 - \frac{1}{6})^2 + \frac{3}{12} (2 - \frac{1}{6})^2 = \frac{47}{36}.$$

- ④ 母標準偏差 $\sqrt{V[X]} = \sqrt{\frac{47}{36}}$.
- ⑤ 確率 $E[I_{[X \leq 1]}(X)] = \frac{4}{12} \cdot 1 + \frac{5}{12} \cdot 1 + \frac{3}{12} \cdot 0 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

計算を楽にする母期待値の性質

モーメント $E[X^k](g(x) = x^k)$ を部品として計算しておいて、他の母期待値はなるべく下の性質から導くのが楽。

母期待値の性質 高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 (3.5)(3.6)p.54

X : 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$: 定数 のとき,

$$E[1] = 1 \quad (\text{E1})$$

$$E[g_1(X) + g_2(X)] = \sum_x (g_1(x) + g_2(x)) \times p(x) = E[g_1(X)] + E[g_2(X)] \quad (\text{E2}, (3.5))$$

$$E[a \cdot g(X)] = \sum_x (ag(x)) \times p(x) = aE[g(X)] \quad (\text{E3})$$

$$E[aX + b] \stackrel{\text{E2}}{=} E[aX] + E[b] \stackrel{\text{E3}}{=} aE[X] + bE[1] \stackrel{\text{E1}}{=} aE[X] + b \quad (\text{E4}, (3.6))$$

ここまで来たよ

① 離散型確率変数

- 事象と確率

① 連続型確率変数

- 確率密度関数

事象の確率

「事象 A の確率」 $= P(A) = P(a(X)) =$ 「条件 $a(X)$ が成立する確率」

$\Omega =$ (トランプのカード全体の集合) のとき,

- (♥がでるといふ事象の確率) $= P(\{\heartsuit 1, \dots, \heartsuit K\}) = P(X \text{ が } \heartsuit)$
- (♥1がでるといふ事象の確率) $= P(\{\heartsuit 1\}) = P(X \text{ が } \heartsuit 1)$
- (黒札がでるといふ事象の確率) $= P(\{\clubsuit 1, \dots, \clubsuit K, \spadesuit 1, \dots, \spadesuit K\}) = P(X \text{ が黒札})$

Ω が有限集合で、等しく確からしい、なら、 P は $\frac{\text{場合の数}}{\text{すべての場合の数}}$ 高校 数学 A

$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ のとき,

- $P(\{0, 2\}) = P(X \text{ は偶数})$
- $P(\{3, 4\}) = P(X \text{ は } 3 \text{ 以上})$
- $P(\{2\}) = P(X = 2)$

事象の確率

岩薩林 確率・統計 なし

A : 事象 (部分集合)

$a(X)$: X の条件

事象の確率

$$P(A) = P(a(X)) = E[I_{[a(X)]}(X)] \quad (P1)$$

ここで,

特徴関数

$$\text{特徴関数 } I_{[a(X)]}(x) = \begin{cases} 1 & (a(x) \text{ が真}) \\ 0 & (a(x) \text{ が偽}) \end{cases}$$

例 $x \in \mathbb{Z}$ のとき,

$$I_{[X^2 \leq 5]}(x) = \begin{cases} 1 & (x = -2, -1, 0, 1, 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

復習+ちょっと (x で書かれた確率関数) I

L02-Q1

Quiz(離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率)

整数に値をとる離散型確率変数 X は次の確率分布に従う.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{55} & (0 \leq x \leq 10) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

- 1 確率 $P(X \leq 5)$ を求めよう.
- 2 母平均値 $E[X]$ を求めよう.
- 3 母分散 $V[X]$ を求めよう.

数学に行きたい人に語れなくて残念なこと

- 確率の公理 岩薩林 確率・統計 §2.2
- 確率に関する基本的定理 岩薩林 確率・統計 §2.2

この授業ではやらないこと 測度 (measure), 測度空間, $dx \rightsquigarrow$ ルベーグ積分

ここまで来たよ

1 離散型確率変数

- 事象と確率

1 連続型確率変数

- 確率密度関数

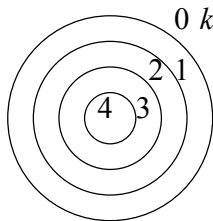
離散型確率変数の例

ジャンボ宝くじの賞金 X 円は離散型確率変数.
確率分布

$$f(x) = \begin{cases} \frac{889}{1000} & (x = 0) \\ \frac{1}{10} & (x = 300) \\ \frac{1}{100} & (x = 3000) \\ \frac{1}{1000} & (x = 10000) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

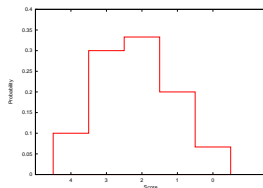
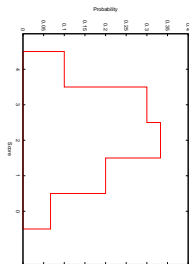
あるプレイヤーのダーツの得点確率

得点: 的の真ん中から順に 4, 3, 2, 1, 0 点



離散型確率分布

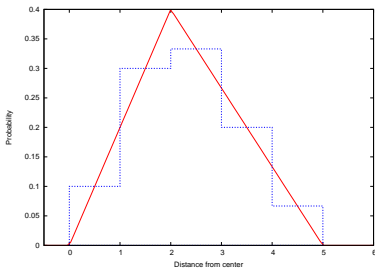
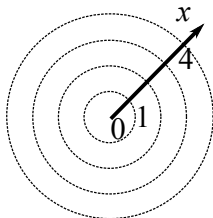
| 得点 s | 確率関数 $f(s)$ |
|--------|-------------|
| 4 | 0.1 |
| 3 | 0.3 |
| 2 | 0.3333 |
| 1 | 0.2 |
| 0 | 0.0667 |



中心から x cm にあてる確率

岩薩林 確率・統計 §4.1

的の真ん中からの距離 x cm, 得点 $s = 4 - x$ 点 (実数).



$x = 0.5$ cm と 0.9 cm への当たりやすさは違う. $x = 1.0$ cm を境に急に変わるわけじゃない. これを表現したい.

↪ 点数の出やすさは x のある関数 $p(x)$ で表される!

連続型確率変数 連続型確率分布

連続型 確率密度関数 $f(x)$ (x は実数)

離散型 確率関数 $p(x)$ (x は整数またはとびとびの値)

連続型確率変数

連続型確率変数

連続型確率変数 X とは、実数値をとり、確率が確率密度関数 $f(x)$ で指定されるもの。

離散的

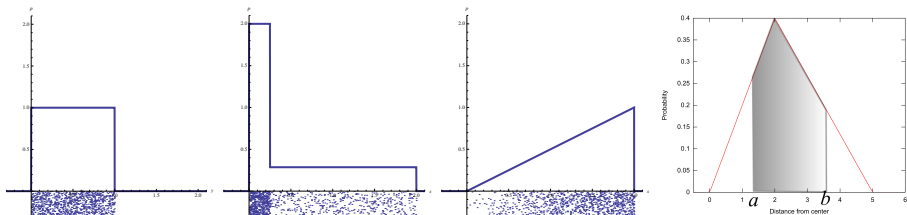
| 得点 x | 確率 $p(x)$ |
|----------|-----------|
| 0 | 0.1 |
| 1 | 0.3 |
| \vdots | |
| x | $p(x)$ |

連続的

- $f(x)$ が大きいほど、その値 x がやすい
- $0 \leq f(x)$ である. $f(x) \leq 1$ とは限らない.

物理・工学系では $p(x)$ と書いたら確率密度関数 $f(x)$ を意味することも

確率密度関数の例



横軸下の細かい点が、試行の結果（縦方向の位置はランダムで意味なし）

確率密度関数と確率 岩薩林 確率・統計 (4.1)

$$P(a \leq X < b) = (\text{あとで}) = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{下側面積})$$

連続型確率変数の母期待値

岩薩林 確率・統計 §4.2

母期待値の定義

岩薩林 確率・統計 (4.8)

$$\text{離散型確率変数} \quad E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot p(x)$$

$$\text{連続型確率変数} \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

- 離散型と同じ定義: 母平均値 $\mu = E[X]$, 母分散 $V[X] = E[(X - \mu)^2]$
- 離散型と同じ公式 E_n, V_n が成立

k 次のモーメント ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$)

岩薩林 確率・統計 (4.9)

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) dx$$

L02-Q2

Quiz(連続型確率変数)

次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ確率変数 X を考える. 次を求めよう.

$$f(x) = \begin{cases} 8x & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

- ① 母期待値 $E[X^k]$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)
- ② 母平均値 $E[X]$
- ③ 母分散 $V[X]$
- ④ 母期待値 $E[(2X + 3)^2]$
- ⑤ 母分散 $V[2X + 3]$
- ⑥ 確率 $P(|4X| \leq 1)$

岩薩林 確率・統計 例題 4.2,4.3

確率密度関数から事象の確率を求める

$$P(\text{事象}) = P(\text{条件}) = E[I_{[\text{条件}]}(X)]$$

$$P(a \leq X < b) = E[I_{[a \leq X < b]}(X)]$$

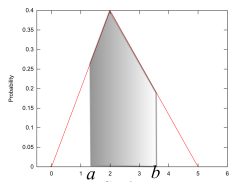
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) I_{[a \leq X < b]}(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

面積

$$\text{全事象の確率} = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = E[1]$$

岩薩林 確率・統計 第4章問題 1(p.79)

岩薩林 確率・統計 第4章練習問題 1

じゃあ、ちょうど距離 $x = a$ cm となる確率は? \rightsquigarrow **0**.

$$I_{[X \text{ の条件}]}(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が条件を満たす}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

連続型確率変数の母平均値と母分散の直観的意味

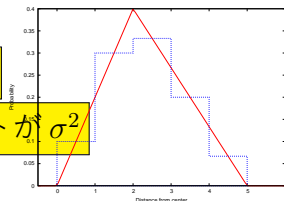
$$\mu = E[X], \sigma^2 = V[X]$$

その 1: 確率密度関数のグラフから

$0 \leq y \leq f(x)$ 部分の横方向の重心の位置 μ

$0 \leq y \leq f(x)$ 部分の幅が σ , 慣性モーメントが σ^2

$f(x)$ のグラフ



その 2: チェビシェフの不等式

母平均値から、(母標準偏差 σ を単位に測って) 離れた値がでる確率は小さい。

その 3: 大数の弱法則

宝くじを何回も買うと、1 回あたりの平均の賞金は、 $E[\text{賞金}]$ に近い