

連続型一様分布, 変数変換, 確率分布の標準化

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L03(2021-04-21 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2021-04-21 Wed 17:43 JST hig"

今日の目標

- 連続型一様分布に直観がはたらく
- 確率変数の多項式の母平均値や母分散を計算できる
- 確率変数の1次式による変換を2つの見方で見られる



L02-Q1

Quiz 解答:離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率

$$\textcircled{1} \quad E[I_{[X \leq 5]}(X)] = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55} I_{[X \leq 5]}(x) = \sum_{x=1}^5 \frac{x}{55} = \frac{15}{55} = \frac{3}{11}.$$

$$\textcircled{2} \quad E[X] = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55} \cdot x = \frac{\frac{1}{6} \cdot 10 \cdot (10+1)(2 \cdot 10 + 1)}{55} = \frac{385}{55} = 7.$$

$$\textcircled{3} \quad V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55} \cdot x^2 - 7^2 = 55 - 7^2 = 6.$$

L02-Q2

Quiz 解答:連続型確率変数

- ① k 次のモーメントは,

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) dx = \int_0^{1/2} x^k 8x dx = \frac{2^3 \cdot 2^{-k-2}}{k+2}.$$

$E[X^0] = 1$ が確認できる.

- ② $E[X^1] = \frac{1}{3}$.
- ③ $V[X] = E[X^2] - E[X^1]^2 = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{72}$.
- ④ $E[(2X+3)^2] = 4E[X^2] + 12E[X^1] + 9E[X^0] = 4 \times \frac{1}{8} + 12 \times \frac{1}{3} + 9 = \frac{27}{2}$.
- ⑤ $V[2X+3] = 2^2 V[X] = 4(E[X^2] - E[X^1]^2) = 4\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{18}$.

6

$$\begin{aligned}
 & P(|4X| \leq 1) \\
 &= E[\mathbb{I}_{\{|X| \leq \frac{1}{4}\}}(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{[-\frac{1}{4} \leq X \leq +\frac{1}{4}]}(x) f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{4}} 0 \cdot 0 dx + \int_{-\frac{1}{4}}^0 1 \cdot 0 dx + \int_0^{\frac{1}{4}} 1 \cdot 8x dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 0 \cdot 8x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} 0 \cdot 8x dx \\
 &= 0 + 0 + \frac{1}{4} + 0 + 0.
 \end{aligned}$$

岩薩林 確率・統計 例題 4.2,4.3

ここまで来たよ

2 連続型確率変数

2 連続型一様分布, 変数変換, 確率分布の標準化

- 連続型一様分布
- 母分散の性質
- 確率変数の1次式による変換と標準化

連続型一様分布 岩薩林 確率・統計 例題 4.1(p.78)

連続型一様分布は, 連続型確率変数の分布の, 名前がつくくらい有名な例.

連続型一様分布 $U(c, d)$

確率変数 X の確率密度関数が次で与えられるとき, X は区間 $[c, d)$ の連続型一様分布 $U(c, d)$ に従う ($X \sim U(c, d)$) という.

$$f(x) = \frac{1}{d-c} I_{[c \leq x < d]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & (c \leq x < d) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L03-Q1

Quiz(連続型一様分布)

連続型確率変数 X が連続型一様分布 $U(c, d)$ にしたがる。

- ① モーメント $E[X^k]$ を求めよう。
- ② 母平均値 $E[X]$ を求めよう。
- ③ 母標準偏差 $\sqrt{V[X]}$ を求めよう。

$U(c, d)$ に対するこの結果は、公式のように記憶して使おう。

L03-Q2

Quiz(連続型一様分布の応用)

あるおんぼろキューブアイス製造マシンから, 一辺 X が 18mm 以上 20mm 以下の範囲で, 同じ確からしきで決まってランダムに出てくる.

- ① X のしたがう分布を答えよう.
- ② キューブアイスの一辺の長さの母期待値を求めよう.
- ③ キューブアイスの表面積の母期待値を求めよう.
- ④ キューブアイスの表面積が $2000[\text{mm}^2]$ 以下である確率を求めよう.
- ⑤ キューブアイスの体積の母期待値を求めよう.

ここまで来たよ

2 連続型確率変数

2 連続型一様分布, 変数変換, 確率分布の標準化

- 連続型一様分布
- 母分散の性質
- 確率変数の1次式による変換と標準化

母期待値の計算の復習

母期待値の性質

高校 数学 B

岩薩林 確率・統計 (3.5)(3.6)p.54

確率統計 I(2021)L2

X : 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$: 定数 のとき,

$$E[1] = 1 \quad (\text{E1})$$

$$E[g_1(X) + g_2(X)] = \sum_x (g_1(x) + g_2(x)) \times p(x) = E[g_1(X)] + E[g_2(X)] \quad (\text{E2}, (3.5))$$

$$E[a \cdot g(X)] = \sum_x (ag(x)) \times p(x) = aE[g(X)] \quad (\text{E3})$$

$$E[aX + b] \stackrel{\text{E2}}{=} E[aX] + E[b] \stackrel{\text{E3}}{=} aE[X] + bE[1] \stackrel{\text{E1}}{=} aE[X] + b \quad (\text{E4}, (3.6))$$

母分散の性質

岩薩林 確率・統計 (3.5)(3.6)p.54

確率統計 I(2021)L2

母分散の性質

高校 数学 B

岩薩林 確率・統計 (3.9)p.55

確率統計 I(2021)L1

X : 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$: 定数 のとき,

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (V1,(3.8))$$

$$V[aX + b] = a^2V[X]. \quad (V2,(3.9))$$

証明 $Y = aX + b$, $E[X] = \mu_X$, $E[Y] = \mu_Y = a\mu_X + b$ とする.

$$\begin{aligned} V[Y] &= \int ((ax + b) - \mu_Y)^2 f(x) dx \\ &= \int ((ax + b) - (a\mu_X + b))^2 f(x) dx \\ &= a^2 \int (x - \mu_X)^2 f(x) dx = a^2V[X] \end{aligned}$$

使うな危険

Example (母期待値のよくある間違い)

$$E[X \times X] \neq E[X] \times E[X]$$

一般に $E[g(X)] \neq g(E[X])$

$\sin(x \cdot x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$ ですか?

$\sin(\sqrt{x}) = \sqrt{\sin(x)}$ ですか?

Example (母分散のよくある間違い)

$$V[aX + b] \neq aV[X] + b$$
$$V[X + X] \neq V[X] + V[X]$$

$V2$ の $a^2V[X]$ と一致しない

$V2$ の $2^2V[X]$ と一致しない

L03-Q3

Quiz(確率変数の変換)

確率変数 X の母期待値, 母分散は次を満たす.

$$V[X] = 9, \quad E[X] = 2.$$

- 1 母期待値 $E[-X^2 + 2X - 3]$ を求めよう.
- 2 確率変数 $Y = -2X - 3$ の母分散 $V[-2X - 3]$ を求めよう.

ここまで来たよ

2 連続型確率変数

2 連続型一様分布, 変数変換, 確率分布の標準化

- 連続型一様分布
- 母分散の性質
- 確率変数の 1 次式による変換と標準化

L03-Q4

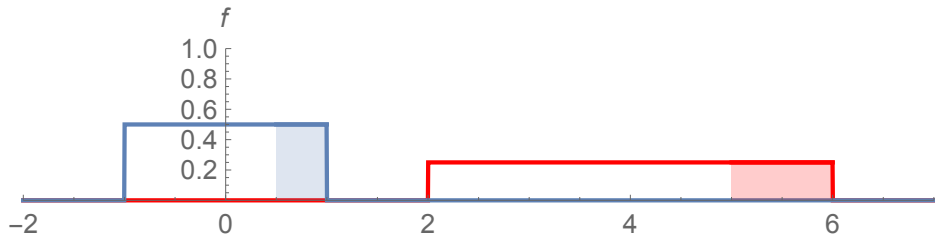
Quiz(連続型一様分布の母期待値)

$X \sim U(-1, 1)$ とする. 次を求めよう.

- ① $E[2X + 4]$
- ② $V[2X + 4]$
- ③ $P(2X + 4 > 5)$

もうひとつの見方

確率変数 $Y = 2X + 4$ は, 別の分布にしたがう確率変数.



左から $X \sim U(-1, 1)$, $Y = aX + b = 2X + 4 \sim U(2, 6)$.

岩薩林 確率・統計 例題 4.4

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} \times f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{a} \times \begin{cases} \frac{1}{2} & (-1 \leq \frac{y-b}{a} < 1) \Leftrightarrow (b-a \leq y < b+a) \\ 0 & \text{(他)} \end{cases}$$

確率変数の標準化

確率変数の標準化 岩薩林 確率・統計 例題 4.4(p.80)

任意の確率変数 X に対して, $\mu = E[X], \sigma^2 = V[X], \sigma > 0$ とする.
確率変数 Z を $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ で定めると, $E[Z] = 0, V[Z] = 1$ となる.

Z は標準化された確率変数

$Y \sim U(2, 6)$ を標準化すると, $Z = \frac{Y - \frac{2+6}{2}}{\frac{6-2}{\sqrt{12}}} = \frac{Y-4}{4/\sqrt{12}} \sim U(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$.

$X \sim U(c, d)$ を標準化すると...

L03-Q5

Quiz(連続型一様分布)

連続型確率変数 $Z \sim U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ に対して, $X = 2Z + 1$ を考える.

- ① X の確率密度関数 $f_X(x)$ とそのグラフを答えよう.
- ② $E[X]$ を求めよう.
- ③ $V[X]$ を求めよう.

モバイルアプリ紹介

Moodle App

取得 <https://download.moodle.org/mobile>



指定する URL <https://moodle.hig3.net/moodle>

Moodle から通知がくる, 閲覧しやすい. テストや練習問題には使わないほうがいい?

オンライン対応

自宅待機などで出席できなくなった場合は, 教務課に届ければ, なるべく不利にならない配慮ができることが多いです.

Gmail App

取得 <https://www.google.com/intl/ja/gmail/about/>



龍大 Gmail y200000@mail.ryukoku.ac.jp の通知と送受信. ポータル休講/教室変更, manaba も Moodle もこのアドレスに通知メール送る (ように設定できる).