連続型確率変数

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I　L02(2022-04-18 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-18 Mon 07:05 JST hig"

今日の目標

- 離散型確率変数の確率が計算できる 岩薩林 確率・統計 §3.2
- 連続型確率変数とは何か説明できる 岩薩林 確率・統計 §3.3
- 連続型確率変数の母期待値母平均値母分散が計算できる 岩薩林 確率・統計 §3.3

L01-Q1

1. 母期待値 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^X] = \frac{4}{12}\cdot\mathrm{e}^{-1} + \frac{5}{12}\cdot\mathrm{e}^{0} + \frac{3}{12}\cdot\mathrm{e}^{2}$.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X] = \frac{4}{12}\cdot(-1) + \frac{5}{12}\cdot 0 + \frac{3}{12}\cdot 2 = \frac{1}{6}(=\mu)$.
3. 母分散
   $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \frac{4}{12}\cdot(-1-\frac{1}{6})^2 + \frac{5}{12}\cdot(0-\frac{1}{6})^2 + \frac{3}{12}(2-\frac{1}{6})^2 = \frac{47}{36}$.
4. 母標準偏差 $\sqrt{\mathrm{V}[X]} = \sqrt{\frac{47}{36}}$.

計算を楽にする母期待値の性質

k 次のモーメント 岩薩林 確率・統計 p.53 $\mathrm{E}[X^k](g(x)=x^k)$ を部品として計算しておいて, 他の母期待値はなるべく下の性質から導くのが楽.

母期待値の性質 高校 数学 B

X: 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$: 定数 のとき,

$$\mathrm{E}[1] = 1 \quad \text{(E1)}$$

$$\mathrm{E}[g_1(X)+g_2(X)] = \sum_x (g_1(x)+g_2(x)) \times p(x) = \mathrm{E}[g_1(X)] + \mathrm{E}[g_2(X)]$$

(E2, 岩薩林 確率・統計 (3.5))

$$\mathrm{E}[a \cdot g(X)] = \sum_x (ag(x)) \times p(x) = a\mathrm{E}[g(X)] \quad \text{(E3)}$$

$$\mathrm{E}[aX+b] \overset{\mathrm{E2}}{=} \mathrm{E}[aX] + \mathrm{E}[b] \overset{\mathrm{E3}}{=} a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[1] \overset{\mathrm{E1}}{=} a\mathrm{E}[X] + b$$

(E4, 岩薩林 確率・統計 (3.6))

ここまで来たよ

1. 離散型確率変数
   - 事象と確率
1. 連続型確率変数
   - 確率密度関数

事象の確率

「事象 A の確率」$=P(A)=P(a(X))=$「条件 $a(X)$ が成立する確率」

$\Omega=$(トランプのカード全体の集合) のとき,

- ($\heartsuit$がでるという事象の確率) $=P(\{\heartsuit 1,\ldots,\heartsuit K\})=P(X$が$\heartsuit)$
- ($\heartsuit 1$がでるという事象の確率) $=P(\{\heartsuit 1\})=P(X$が$\heartsuit 1)$
- (黒札がでるという事象の確率) $=P(\{\clubsuit 1,\ldots,\clubsuit K,\spadesuit 1,\ldots,\spadesuit K\})=P(X$が黒札$)$

Ω が有限集合で, 等しく確からしい, なら, P は $\frac{\text{場合の数}}{\text{すべての場合の数}}$ $\boldsymbol{A}$

$\Omega=\{0,1,2,3\}$ のとき,

- $P(\{0,2\})=P(X$ は偶数$)$
- $P(\{3,4\})=P(X$ は 3 以上$)$
- $P(\{2\})=P(X=2)$

事象の確率 岩薩林 確率・統計 なし

A: 事象 (部分集合)
$a(X)$: X の条件

事象の確率

$$P(A) = P(a(X)) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[a(X)]}(X)] \tag{P1}$$

ここで,

特徴関数

$$\text{特徴関数}\mathrm{I}_{[a(X)]}(x) = \begin{cases} 1 & (a(x)\text{ が真}) \\ 0 & (a(x)\text{ が偽}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{例}}$ $x \in \mathbb{Z}$ のとき,

$$\mathrm{I}_{[X^2 \le 5]}(x) = \begin{cases} 1 & (x = -2, -1, 0, 1, 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

復習+ちょっと (x で書かれた確率関数) I

L02-Q1

Quiz(離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率)

整数に値をとる離散型確率変数 X は次の確率分布に従う.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{55} & (0 \leq x \leq 10) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 確率 $P(X \leq 5)$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

数学に行きたい人に語れなくて残念なこと

- 確率の公理 岩薩林 確率・統計 §2.2
- 確率に関する基本的定理 岩薩林 確率・統計 §2.2

この授業ではやらないこと 測度 (measure), 測度空間, dx $\rightsquigarrow$ ルベーグ積分

ここまで来たよ

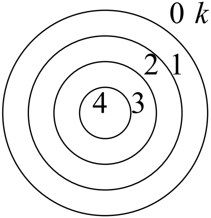
離散型確率変数の例

ジャンボ宝くじの賞金 X 円は離散型確率変数.
確率分布

$$f(x) = \begin{cases} \frac{889}{1000} & (x = 0) \\ \frac{1}{10} & (x = 300) \\ \frac{1}{100} & (x = 3000) \\ \frac{1}{1000} & (x = 10000) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

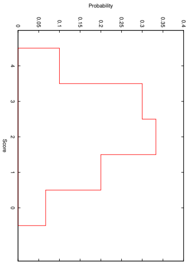
あるプレイヤーのダーツの得点確率

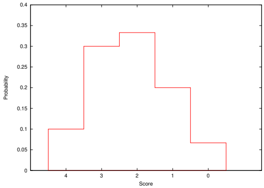
得点: 的の真ん中から順に $4, 3, 2, 1, 0$ 点



離散型確率分布

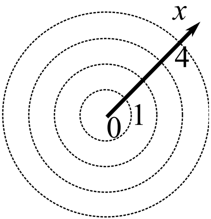
得点 s	確率関数 $f(s)$
4	0.1
3	0.3
2	0.3333
1	0.2
0	0.0667

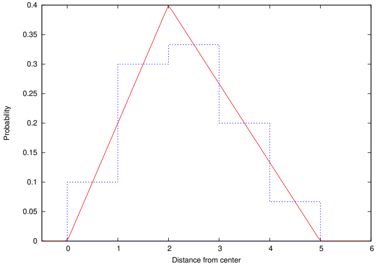




中心から x cm にあてる確率 岩薩林 確率・統計 §4.1

的の真ん中からの距離 x cm, 得点 $s = 4 - x$ 点 (実数).





$x = 0.5$cm と 0.9 cm への当たりやすさは違う. $x = 1.0$cm を境に急に変わるわけじゃない. これを表現したい.

$\rightsquigarrow$ 点数の出やすさは x のある関数 $p(x)$ で表される!

連続型確率変数 連続型確率分布

連続型 確率密度関数 $f(x)$ (x は実数)

離散型 確率関数 $p(x)$ (x は整数またはとびとびの値)

連続型確率変数

連続型確率変数

連続型確率変数 X とは, 実数値をとり, 確率が確率密度関数 $f(x)$ で指定されるもの.

離散的

得点 x	確率 $p(x)$
0	0.1
1	0.3
$\vdots$	
x	$p(x)$

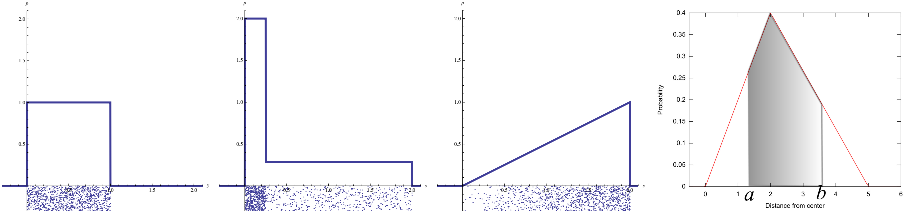
連続的

- $f(x)$ が大きいほど, その値 x がでやすい
- $0 \leq f(x)$ である. $f(x) \leq 1$ とは限らない.

物理・工学系では $p(x)$ と書いたら確率密度関数 $f(x)$ を意味することも

計算科学☆演習 II

確率密度関数の例



横軸下の細かい点が, 試行の結果 (縦方向の位置はランダムで意味なし)

確率密度関数と確率 岩薩林 確率・統計 (4.1)

$$P(a \leq X < b) = (\text{あとで}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{下側面積})$$

連続型確率変数の母期待値 岩薩林 確率・統計 §4.2

母期待値の定義 岩薩林 確率・統計 (4.8)

$$\text{離散型確率変数} \quad \mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot p(x)$$

$$\text{連続型確率変数} \quad \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

- 離散型と同じ定義: 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X]$, 母分散 $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2]$
- 離散型と同じ公式 En, Vn が成立

k 次のモーメント $(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ 岩薩林 確率・統計 (4.9)

$$\mathrm{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

L02-Q1

Quiz(連続型確率変数)

次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ確率変数 X を考える. 次を求めよう.

$$f(x) = \begin{cases} 8x & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[X^k]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$
4. 母期待値 $\mathrm{E}[(2X + 3)^2]$
5. 母分散 $\mathrm{V}[2X + 3]$
6. 確率 $P(|4X| \leq 1)$

岩薩林 確率・統計 例題 4.2,4.3

確率密度関数から事象の確率を求める

$$P(\text{事象}) = P(\text{条件}) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[\text{条件}]}(X)]$$

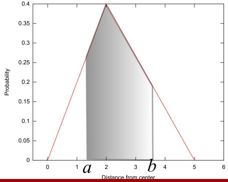
$$P(a \le X < b) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[a \le X < b]}(X)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{I}_{[a \le X < b]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\text{面積}}$$

$$\text{全事象の確率} = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{E}[1]$$

岩薩林 確率・統計 第 4 章問題 1(p.79) 岩薩林 確率・統計 第 4 章練習問題 1

じゃあ, ちょうど距離 $x = a$ cm となる確率は? $\rightsquigarrow \boxed{0}$.

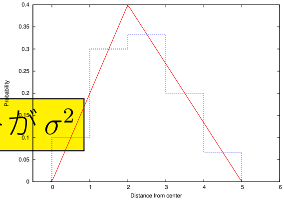


$$\mathrm{I}_{[X\text{ の条件}]}(x) = \begin{cases} 1 & (x\text{ が条件を満たす}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

連続型確率変数の母平均値と母分散の直観的意味

$\mu = \mathrm{E}[X], \sigma^2 = \mathrm{V}[X]$

$f(x)$ のグラフ



その 1: 確率密度関数のグラフから

$0 \leq y \leq f(x)$ 部分の横方向の重心の位置 μ

$0 \leq y \leq f(x)$ 部分の幅が σ, 慣性モーメントが σ^2

その 2: チェビシェフの不等式

母平均値から, (母標準偏差 σ を単位に測って) 離れた値がでる確率は小さい.

その 3: 大数の弱法則

宝くじを何回も買うと, 1 回あたりの平均の賞金は,
E[賞金] に近い