連続型一様分布，変数変換，確率分布の標準化

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I　L03(2022-04-25 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-25 Mon 07:15 JST hig"

今日の目標

- 連続型一様分布に直観がはたらく
- 確率変数の多項式の母平均値や母分散を計算できる
- 確率変数の 1 次式による変換を 2 つの見方で見られる

L02-Q1

Quiz 解答: 連続型確率変数

1. k 次のモーメントは,
$$\mathrm{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} x^k 8x\,\mathrm{d}x = \frac{2^3 \cdot 2^{-k-2}}{k+2}.$$
$\mathrm{E}[X^0] = 1$ が確認できる.
2. $\mathrm{E}[X^1] = \frac{1}{3}$.
3. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X^1]^2 = \frac{1}{8} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{72}$.
4. $\mathrm{E}[(2X+3)^2] = 4\mathrm{E}[X^2] + 12\mathrm{E}[X^1] + 9\mathrm{E}[X^0] = 4 \times \frac{1}{8} + 12 \times \frac{1}{3} + 9 = \frac{27}{2}$.
5. $\mathrm{V}[2X+3] = 2^2\mathrm{V}[X] = 4(\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X^1]^2) = 4(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}) = \frac{1}{18}$.

6

$$
\begin{aligned}
&P(|4X| \le 1) \\
=&\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[|X| \le \frac{1}{4}]}(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_{[-\frac{1}{4} \le X \le +\frac{1}{4}]}(x) f(x)\, \mathrm{d}x \\
=&\int_{-\infty}^{-\frac{1}{4}} 0 \cdot 0\, \mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{4}}^{0} 1 \cdot 0\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{4}} 1 \cdot 8x\, \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 0 \cdot 8x\, \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} 0 \cdot 0\, \mathrm{d}x \\
=&0 + 0 + \tfrac{1}{4} + 0 + 0.
\end{aligned}
$$

岩薩林 確率・統計 例題 4.2,4.3

ここまで来たよ

3 連続型確率変数

3 連続型一様分布, 変数変換, 確率分布の標準化

- 連続型一様分布
- 確率分布関数
- 母分散の性質
- 確率変数の 1 次式による変換と標準化

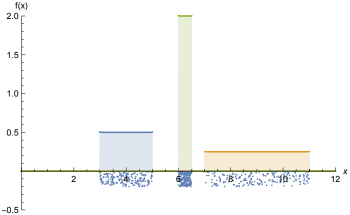
連続型一様分布 岩薩林 確率・統計 例題 4.1(p.78)

連続型一様分布は，連続型確率変数の分布の，名前がつくくらい有名な例．

連続型一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$

確率変数 X の確率密度関数が次で与えられるとき，X は区間 $[c,d)$ の連続型一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$ に従うといい，記号 ∼(従う) で $X \sim \mathrm{U}(c,d)$ と書く．

$$f(x) = \frac{1}{d-c}\mathrm{I}_{[c \le x \le d]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & (c \le x \le d) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



$\mathrm{U}(4,6), \mathrm{U}(6,6.5), \mathrm{U}(7,11)$.

L03-Q1

Quiz(連続型一様分布)

連続型確率変数 X が連続型一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$ にしたがう.

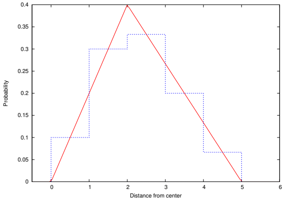
1. モーメント $\mathrm{E}[X^k]$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母標準偏差 $\sqrt{\mathrm{V}[X]}$ を求めよう.

$\mathrm{U}(c,d)$ に対するこの結果は, 公式のように記憶して使おう.

連続型確率変数の母平均値と母分散の直観的意味

$\mu = \mathrm{E}[X], \sigma^2 = \mathrm{V}[X]$

$f(x)$ のグラフ



その 1: 確率密度関数のグラフから

自分の言葉でどうぞ

自分の言葉でどうぞ

その 2: チェビシェフの不等式

母平均値から, (母標準偏差 σ を単位に測って) 離れた値がでる確率は小さい.

その 3: 大数の弱法則

宝くじを何回も買うと, 1 回あたりの平均の賞金は,

自分の言葉でどうぞ

L03-Q2

Quiz(連続型一様分布の応用)

あるおんぼろキューブアイス製造マシンから, 一辺 X が 18mm 以上 20mm 以下の範囲で, 同じ確からしさで決まってランダムに出てくる.

1. X のしたがう分布を答えよう.
2. キューブアイスの一辺の長さの母期待値を求めよう.
3. キューブアイスの表面積の母期待値を求めよう.
4. キューブアイスの表面積が $2000[\mathrm{mm}^2]$ 以下である確率を求めよう.
5. キューブアイスの体積の母期待値を求めよう.

ここまで来たよ

3 連続型確率変数

3 連続型一様分布，変数変換，確率分布の標準化

- 連続型一様分布
- 確率分布関数
- 母分散の性質
- 確率変数の 1 次式による変換と標準化

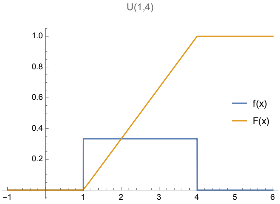
確率分布関数

一般の離散型，連続型確率変数 X に対して，

定義 (累積) 分布関数

$$\text{離散型} F(x) = \sum_{x' \leq x} p(x') = P(X \leq x), \tag{3.2}$$

$$\text{連続型} F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\mathrm{d}x' = P(X \leq x) \tag{4.4}$$



逆に言うと $F'(x) = f(x)$.
大文字 X は確率変数 (別に書いた確率密度にしたがう) で，値を代入できないし，左辺に現れない．

(累積) 分布関数の性質

$F(x)$ は広義単調増加. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

ここまで来たよ

3 連続型確率変数

3 連続型一様分布, 変数変換, 確率分布の標準化

- 連続型一様分布
- 確率分布関数
- 母分散の性質
- 確率変数の 1 次式による変換と標準化

母期待値の計算の復習

母期待値の性質

高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 (3.5)(3.6)p.54 確率統計 I(2022)L02

X: 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$: 定数 のとき,

$$\mathrm{E}[1] = 1 \tag{E1}$$

$$\mathrm{E}[g_1(X) + g_2(X)] = \mathrm{E}[g_1(X)] + \mathrm{E}[g_2(X)] \tag{E2,(3.5)}$$

$$\mathrm{E}[a \cdot g(X)] = a\mathrm{E}[g(X)] \tag{E3}$$

$$\mathrm{E}[aX + b] \overset{\mathrm{E2}}{=} \mathrm{E}[aX] + \mathrm{E}[b] \overset{\mathrm{E3}}{=} a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[1] \overset{\mathrm{E1}}{=} a\mathrm{E}[X] + b \tag{E4,(3.6)}$$

母分散の性質 岩薩林 確率・統計 (3.8)(3.9)p.55

母分散の性質 高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 (3.9)p.55

X: 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$: 定数 のとき,

$$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 \quad \text{(V1,(3.8))}$$

$$\mathrm{V}[aX + b] = a^2\mathrm{V}[X]. \quad \text{(V2,(3.9))}$$

証明 $\mu = \mathrm{E}[X]$ とする.
$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X - \mu)^2] = \mathrm{E}[X^2] - 2\mu\mathrm{E}[X] + \mu^2 = \mathrm{E}[X^2] - \mu^2$.
$\mu = \mathrm{E}[X]$ と, $\mathrm{E}[Y] = \mu_Y = a\mu + b$ とする.

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}[Y] =& \mathrm{E}[(Y - \mu_Y)^2] \\
=& \mathrm{E}[(aX + b) - (a\mu + b))^2] \\
=& a^2\mathrm{E}[(X - \mu)^2] = a^2\mathrm{V}[X].
\end{aligned}$$

使うな危険

Example (母期待値のよくある間違い)

$$\mathrm{E}[X \times X] \neq \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[X]$$

$$一般に\mathrm{E}[g(X)] \neq g(\mathrm{E}[X])$$

$\int x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int x f(x)\mathrm{d}x \times \int x f(x)\mathrm{d}x$ ですか?
$\int \sin(x) f(x)\mathrm{d}x = \sin(\int x f(x)\mathrm{d}x)$ ですか?

Example (母分散のよくある間違い)

$$\mathrm{V}[aX + b] \neq a\mathrm{V}[X] + b$$

$$\mathrm{V}[X + X] \neq \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[X]$$

V2 の $a^2\mathrm{V}[X]$ と一致しない
V2 の $2^2\mathrm{V}[X]$ と一致しない

L03-Q3

Quiz(確率変数の変換)

確率変数 X の母期待値, 母分散は次を満たす.

$$\mathrm{V}[X] = 9, \quad \mathrm{E}[X] = 2.$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[-X^2 + 2X - 3]$ を求めよう.
2. 確率変数 $Y = -2X - 3$ の母分散 $\mathrm{V}[-2X - 3]$ を求めよう.

ここまで来たよ

3 連続型確率変数

3 連続型一様分布, 変数変換, 確率分布の標準化
- 連続型一様分布
- 確率分布関数
- 母分散の性質
- 確率変数の 1 次式による変換と標準化

L03-Q4

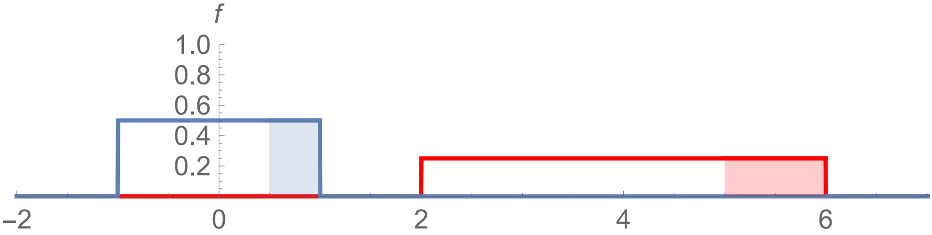
Quiz(連続型一様分布の母期待値)

$X \sim \mathrm{U}(-1, 1)$ とする．次を求めよう．

1. $\mathrm{E}[2X+4]$
2. $\mathrm{V}[2X+4]$
3. $P(2X+4>5)$

もうひとつの見方

確率変数 $Y = 2X + 4$ は, 別の分布にしたがう確率変数.



左から $X \sim \mathrm{U}(-1, 1)$, $Y = aX + b = 2X + 4 \sim \mathrm{U}(2, 6)$.

岩薩林 確率・統計 例題 4.4

$Y = aX + b$ のとき

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \frac{1}{a} \times f_{\mathrm{X}}\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{a} \times \begin{cases} \frac{1}{2} & \left(-1 \leq \frac{y-b}{a} < 1\right) \Leftrightarrow (b - a \leq y < b + a) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

確率変数の標準化

確率変数の標準化 岩薩林 確率・統計 例題 4.4(p.80)

任意の確率変数 X に対して, $\mu = \mathrm{E}[X], \sigma^2 = \mathrm{V}[X], \sigma > 0$ とする.
確率変数 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ を「X を標準化した確率変数」という.
$\mathrm{E}[Z] = 0$, $\mathrm{V}[Z] = 1$ となる.

$\mathrm{E}[\frac{X-\mu}{\sigma}] = \boxed{0}$, $\mathrm{V}[\frac{X-\mu}{\sigma}] = \boxed{1}$

$Y \sim \mathrm{U}(2,6)$ を標準化すると, $Z = \dfrac{Y - \frac{2+6}{2}}{\frac{6-2}{\sqrt{12}}} = \dfrac{Y-4}{4/\sqrt{12}} \sim \mathrm{U}(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$.

$X \sim \mathrm{U}(c,d)$ を標準化すると$\cdots$

L03-Q5

Quiz(連続型一様分布)

連続型確率変数 $Z \sim \mathrm{U}(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ に対して, $X = 2Z + 1$ を考える.

1. X の確率密度関数 $f_X(x)$ とそのグラフを答えよう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

モバイルアプリ紹介

Moodle App

取得 https://download.moodle.org/mobile

指定する URL https://moodle.hig3.net/moodle

Moodle から通知がくる，閲覧しやすい．テストや練習問題には使わないほうがいい?

Gmail App

取得 https://www.google.com/intl/ja/gmail/about/

龍大 Gmail y200000@mail.ryukoku.ac.jp の通知と送受信．ポータル休講/教室変更，manaba も Moodle もこのアドレスに通知メール送る (ように設定できる)．