二項分布, 独立同分布の和

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I　L09(2022-06-06 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-07 Tue 08:04 JST hig"

今日の目標

- 二項分布の母期待値, 母分散, 確率を求められる
  岩薩林 確率・統計 §3.4
- チェビシェフの不等式 (母平均値・母分散の正確な意味), 大数の法則が説明できる 岩薩林 確率・統計 §4.3,§4.4

L08-Q1

Quiz 解答: 独立な確率変数の母期待値

1. X, Y は独立なので $\mathrm{E}[XY] \overset{\text{IE1}}{=} \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$ であることに注意して, $\mathrm{E}[(-2X+3Y)(X+5Y)] \overset{\text{E5}}{=} \mathrm{E}[-2X^2] + \mathrm{E}[-7XY] + \mathrm{E}[15Y^2] \overset{\text{V1,IE1}}{=} -2(\mathrm{V}[X]+\mathrm{E}[X]^2) - 7\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] + 15(\mathrm{V}[Y]+\mathrm{E}[Y]^2) = 240.$
2. X, Y は独立なので $\mathrm{V}[g_1(X)+g_2(Y)] \overset{\text{IC2}}{=} \mathrm{V}[g_1(X)] + \mathrm{V}[g_2(Y)]$ であることに注意して, $\mathrm{V}[-2X+3Y] \overset{\text{IC2}}{=} \mathrm{V}[-2X] + \mathrm{V}[3Y] \overset{\text{V2}}{=} (-2)^2\mathrm{V}[X] + 3^2\mathrm{V}[Y] = 119.$

L08-Q2

Quiz 解答:2 次元の離散型確率変数の同時分布と周辺分布

$$f(s) = \begin{cases} 4/32 & (s=5) \\ 11/32 & (s=6) \\ 16/32 & (s=7) \\ 1/32 & (s=8) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L08-Q3

Quiz 解答: 独立同分布の母期待値母分散

1. $3\mu.$
2. $3\mu.$
3. 3μ
4. $9\sigma^2.$
5. $3\sigma^2.$
6. $5\sigma^2.$
7. $3(\sigma^2+\mu^2) + 3 \times 2 \times \mu^2.$

ここまで来たよ

9 確率変数の独立, 和, 独立同分布の和

9 二項分布, 独立同分布の和
- 独立同分布にしたがう確率変数の和
- 二項分布
- ベルヌーイ分布と二項分布・独立同分布の性質の応用
- チェビシェフの不等式と大数の法則

独立同分布

$X = X_1, Y = X_2$ は独立同分布 定義: 独立かつ同分布

例: 形の同じ青色コイン X_1 と赤色コイン X_2.
表がでる (1) の確率 p

$x_2 \backslash x_1$	0	1
0	$(1-p)^2$	$p(1-p)$
1	$p(1-p)$	p^2

独立同分布 (i.i.d.) 岩薩林 確率・統計 定理 4.2(p.87) の仮定,p.113

離散型/連続型確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が, たがいに独立で, すべて同分布に従う (同じ周辺分布 $p_{\mathrm{X_i}}(x_i) = p(x)$ を持つ) とする.
このとき $X_1, \ldots, X_n$ は独立同分布に従う (i.i.d.=independent and identically-distributed) という.

母期待値も共通になる. $\mathrm{E}[X_i] = \mu, \mathrm{V}[X_i] = \sigma^2$.
例: 同じ形の n 色のサイコロ. X_1=青色, X_2=緑色, $\cdots$.

独立同分布にしたがう確率変数の和の性質 岩薩林 確率・統計 例題 4.6

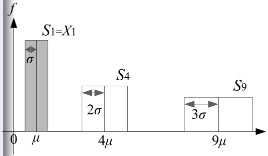
i.i.d にしたがう確率変数の和

$X_1, \ldots, X_n$: i.i.d. 母平均値 $\mathrm{E}[X_i] = \mu$, 母分散 $\mathrm{V}[X_i] = \sigma^2$.
和の確率変数 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

$$\mathrm{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] \overset{\text{同分布}}{=} n \times \mu.$$

$$\mathrm{V}[S_n] \overset{\text{独立}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}[X_i] \overset{\text{同分布}}{=} n \times \sigma^2$$

S_n の確率密度関数はこんな感じ?



L09-Q1

Quiz(独立同分布にしたがう確率変数の和)

ダーツで, 1 回投げるごとに点数が得られ, n 回投げた合計点で競うルールでプレイしている.
あるプレイヤーの i 回目の点数を確率変数 X_i とすると, X_i は独立同分布にしたがい, $\mathrm{E}[X_i] = 80, \mathrm{V}[X_i] = 200$ だという.
このプレイヤーが n 回投げた合計点を確率変数 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とする.

1. $\mathrm{E}[S_{10}]$, $\mathrm{V}[S_{10}]$ を求めよう.
2. $\mathrm{E}[\frac{1}{10}S_{10}]$, $\mathrm{V}[\frac{1}{10}S_{10}]$ を求めよう.
3. $\mathrm{E}[\frac{1}{100}S_{100}]$, $\mathrm{V}[\frac{1}{100}S_{100}]$ を求めよう.

ここまで来たよ

9 確率変数の独立, 和, 独立同分布の和

9 二項分布, 独立同分布の和
- 独立同分布にしたがう確率変数の和
- 二項分布
- ベルヌーイ分布と二項分布・独立同分布の性質の応用
- チェビシェフの不等式と大数の法則

復習+ちょっと (x で書かれた確率関数) I

L09-Q2

Quiz(離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率)

整数に値をとる離散型確率変数 X は次の確率分布に従う.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{55} & (0 \leq x \leq 10) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 確率 $P(X \leq 5)$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

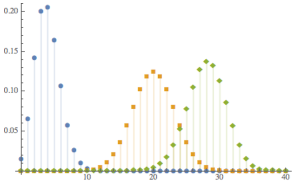
二項分布 高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 §3.4

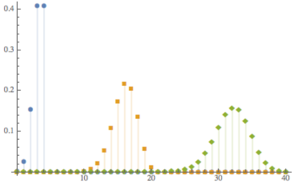
二項分布 岩薩林 確率・統計 (3.24)p.66

離散型確率変数 X が次の確率分布を持つとき，X はパラメタ n, p の二項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ にしたがうという．

$$p(x) = \begin{cases} \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x (1-p)^{n-x} & (x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

意味：確率 p で表の出るコインを n 回投げたとき，x 回表が出る確率．





$${}_n\mathrm{C}_x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$\mathrm{B}(40, 0.1), \mathrm{B}(40, 0.5), \mathrm{B}(40, 0.7)$，$\mathrm{B}(4, 0.8), \mathrm{B}(20, 0.8), \mathrm{B}(40, 0.8)$

二項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ の Python での扱い

Google Colab 確率統計 I(2022)L04
https://colab.research.google.com/drive/1YCCbsWq51EDTx7za8qUjTZQhga0MrlCh

```
from scipy import stats

# 二項分布 = binomial distribution
# scipy.stats.binom(n=10,p=0.3) 確率分布名=binom(n,p)

# 確率(質量)関数 probability mass function 離散型に使う用語
scipy.stats.binom(n=10,p=0.3).pmf(x) # =p(x)

# 確率関数のグラフ描画
sns.barplot(x,stats.binom(n=1,p=0.2).pmf(x)) # グラフ描画

# 確率密度関数
stats.確率分布名(loc=位置, scale=幅).pdf(x)

# 累積分布関数
  stats.確率分布名(loc=位置, scale=幅).cdf(x)

# 累積分布関数の逆関数
stats.確率分布名(loc=位置, scale=幅).ppf(x)
```

二項分布の母平均値と母分散 (証明延期) 岩薩林 確率・統計 定理 3.1(p.70)

$$\mathrm{E}[X] = \boxed{np}, \mathrm{V}[X] = \boxed{np(1-p)}$$

$\mathrm{E}[1] =$ 岩薩林 確率・統計 式 (3.26)–(3.27)

二項定理 高校 数学 A 岩薩林 確率・統計 (3.25)p.68

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_x a^x b^{n-x}$$

L09-Q3

Quiz(二項分布)

確率 $p = \frac{2}{3}$ で表のでるコインを 100 回投げる.

1. 表がでる回数 X は確率変数である. X のしたがう確率分布を答えよう.
2. 表が 40 回でる確率を求めよう. 階乗 $n!$ とべき乗 a^b と分数 $\frac{a}{b}$ は簡単化・約分しなくてよい. P,C などの記号は使わないで答えること.
3. 表がでる回数の母平均値, 母分散を求めよう.

L09-Q4

Quiz(二項分布または独立同分布)

あるスーパーのおでんセット 1 パックには，確率 $\frac{7}{10}$ で卵が 2 個，確率 $\frac{3}{10}$ で卵が 0 個 (!) 入っている．おでんセットを 10 パックを買ったときに得られる卵の合計の個数を確率変数 Y とする．各パックの卵の個数は独立とする．

1. 10 パック中 X パックが卵 2 個入りとする．Y を X で表そう．X のしたがう確率分布を答えよう．
2. 母平均値 $\mathrm{E}[Y]$ を求めよう．
3. 母分散 $\mathrm{V}[Y]$ を求めよう．
4. 確率 $P(Y = 16)$ を求めよう．

ここまで来たよ

9 確率変数の独立, 和, 独立同分布の和

9 二項分布, 独立同分布の和

- 独立同分布にしたがう確率変数の和
- 二項分布
- ベルヌーイ分布と二項分布・独立同分布の性質の応用
- チェビシェフの不等式と大数の法則

ベルヌーイ分布

ベルヌーイ分布

岩薩林 確率・統計 名前は出てこない

$n = 1$ の二項分布 $\mathrm{B}(1, p)$ をパラメタ p のベルヌーイ分布という.

$$P(X = x) = p(x) = p^x \cdot (1-p)^{1-x} = \begin{cases} 1-p & (x = 0) \\ p & (x = 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

意味: ベルヌーイ試行=(不公平な) コイン投げ. 表がでる確率 p. 表 $x = 1$.

ベルヌーイ分布のモーメントと母平均値と母分散

$$\mathrm{E}[X^k] = \boxed{p} \; (k = 1, 2, \ldots), \quad \mathrm{V}[X] = \boxed{p(1-p)}.$$

ベルヌーイ分布と二項分布のもうひとつの関係

岩薩林 確率・統計 例題 4.6 の最初の 1 文

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立同分布 $\mathrm{B}(1,p)$ にしたがうとき,
$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ は $S_n \sim \mathrm{B}(n,p)$.

なぜなら

X_i は 1 枚のコインのうち表が出た枚数. S_n は n 枚のコインのうち表が出た枚数.

二項分布の母平均値・母分散の導出

$X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{B}(1, p)$ とすると, $\mathrm{E}[X_i] = p, \mathrm{V}[X_i] = p(1-p)$.

このとき, 独立同分布の和 確率統計 I(2022)L09 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{B}(n, p)$ に対して,

$\mathrm{E}[S_n] = \mathrm{E}[X_1] + \cdots + \mathrm{E}[X_n] \overset{\text{同分布}}{=} n \times p$

$\mathrm{V}[S_n] \overset{\text{独立}}{=} \mathrm{V}[X_1] + \cdots + \mathrm{V}[X_n] \overset{\text{同分布}}{=} n \times p(1-p)$.

(前と同じ問の別解)
L09-Q5

Quiz(二項分布または独立同分布)

あるスーパーのおでんセット 1 パックには, 確率 $\frac{7}{10}$ で卵が 2 個, 確率 $\frac{3}{10}$ で卵が 0 個 (!) 入っている. おでんセットを 10 パックを買ったときに得られる卵の合計の個数を確率変数 Y とする. 各パックの卵の個数は独立とする.

1. 10 パック中 X パックが卵 2 個入りとする. Y を X で表そう. X のしたがう確率分布を答えよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[Y]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[Y]$ を求めよう.
4. 確率 $P(Y = 16)$ を求めよう.

ここまで来たよ

9 確率変数の独立, 和, 独立同分布の和

9 二項分布, 独立同分布の和
- 独立同分布にしたがう確率変数の和
- 二項分布
- ベルヌーイ分布と二項分布・独立同分布の性質の応用
- チェビシェフの不等式と大数の法則

チェビシェフの不等式

チェビシェフの不等式 Chebyshev's inequality　岩薩林 確率・統計 §4.3(4.15)

X を離散型または連続型確率変数とする. $\mu = \mathrm{E}[X]$: 母平均値,
$\sigma^2 = \mathrm{V}[X]$: 母分散
$a > 0$: 任意の正の実数.
このとき次が成立する.

$$P(|X - \mu| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}$$

どんな X にも使えて便利な不等式. これが母平均値・母標準偏差のひとつの意味づけ.

$a > 1$ と思う. 母平均値 μ からの距離が母標準偏差 $\times a$ 以上離れた値が出る確率は, $1/a^2$ 以下. 母平均値から離れるほど, 確率は小

チェビシェフの不等式の証明 (離散型)

意味のわからない $\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[|X-\mu|\geq a\sigma]}(X)(X-\mu)^2]$ を定義に戻って書くと,

$$
\begin{aligned}
(a\sigma)^2 \times P(|X-\mu| \geq a\sigma) =& \sum_x \mathrm{I}_{[|X-\mu|\geq a\sigma]}(x)(a\sigma)^2\, p(x) \\
\leq& \sum_x \mathrm{I}_{[|X-\mu|\geq a\sigma]}(x)(x-\mu)^2\, p(x) \\
\leq& \sum_x (x-\mu)^2\, p(x) \\
=& \mathrm{V}[X] = \sigma^2
\end{aligned}
$$

連続型での証明 岩薩林 確率・統計 §4.3

大数の (弱) 法則アバウト版 岩薩林 確率・統計 §4.4

$X_1, \ldots, X_n$ が独立同分布にしたがい, $\mathrm{E}[X_i] = \mu$, $\mathrm{V}[X_i] = \sigma^2$, $U_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ のとき, n が十分大きいとき U_n は'ほぼ μ に等しい' (U_n が μ から外れる確率はゼロに近づく)

証明 チェビシェフの不等式 + i.i.d. 1/n

直観的意味

賭けは, たくさんの回数繰り返すと, 大もうけや大損の確率は減り, 決まった損得の額に集中する.

弱法則の正確な表現

U_n が μ から外れる確率は $n \to +\infty$ でゼロに近づく

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} P(|U_n - \mu| > \epsilon) = 0$$

証明 $X_1, \ldots, X_n$:i.i.d., $\mathrm{E}[X_i] = \mu, \mathrm{V}[X_i] = \sigma^2$ なので,
$\mathrm{E}[U_n] = \mu, \mathrm{V}[U_n] = \mathrm{V}[X_i]/n = \sigma^2/n$.
U_n に対するチェビシェフの不等式より,

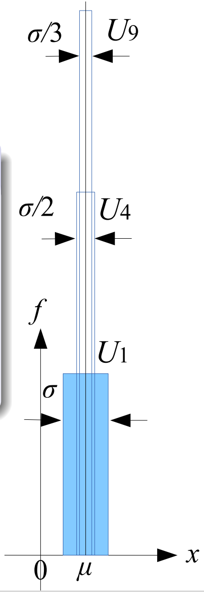
$$P\left(|U_n - \mu| \geq a \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{a^2}.$$

$a > 0$ は任意なので, 不等式の右辺が ϵ になるように慎重に悪巧みして
$a = \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}$ とおくと,

$$P\left(|U_n - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}.$$

右辺は, $n \to +\infty$ で $\to 0$.

U_n の確率密度関数はこんな感じ?



i.i.d にしたがう確率変数の和の $1/n$

$X_1, \ldots, X_n$: i.i.d.
新しい確率変数: $U_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$

$$\mathrm{E}[U_n] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{n} S_n\right] \overset{\text{同分布}}{=} \frac{1}{n} \times n \times \mu.$$

$$\mathrm{V}[U_n] = \mathrm{V}\left[\frac{1}{n} S_n\right] \overset{\text{iid}}{=} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times n \times \sigma^2.$$