統計的仮説検定・多次元の確率変数の推定

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I　L14(2022-07-11 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-11 Mon 12:13 JST hig"

今日の目標

- 統計的仮説検定を説明できる
- 母平均値の両側 t 検定ができる　岩薩林 確率・統計 §7.1
- 多次元確率変数の母期待値, 母共分散, 母相関係数を推定できる

L13-Q1

Quiz 解答:t 分布の確率と $t_k(\alpha)$

1. $F^{-1}(1-0.025) = \mathrm{ppf}(1-0.025) = z(0.025) = 1.960.$
2. 標準正規分布の確率密度関数は偶関数なので,
   $F^{-1}(0.025) = \mathrm{ppf}(0.025) = z(1-0.025) = -z(0.025) = -1.960.$
3. $F^{-1}1-0.025) = \mathrm{ppf}(1-0.025) = t_{40}(0.025) = 2.021.$
4. t 分布の確率密度関数は偶関数なので, $F^{-1}(0.025) =$
   $\mathrm{ppf}(1-0.025) = t_{40}(1-0.025) = -t_{40}(0.025) = -2.021.$

L13-Q2

Quiz 解答: 母平均値の区間推定 (母分散未知)

1. 重さの標本平均値は $\overline{X} = 50\mathrm{g}$. 不偏標本分散は $S^2 = \frac{1}{4-1} \cdot 14\mathrm{g}^2$. 信頼係数 0.95 の信頼区間は

$$50 - t_3(0.05/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} < \mu < 50 + t_3(0.05/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}}$$
$$50 - 3.182 \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} < \mu < 50 + 3.182 \times \sqrt{\frac{14/3}{4}}.$$

2. 同様に,

$$50 - t_3(0.01/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} < \mu < 50 + t_3(0.01/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}}$$
$$50 - 5.841 \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} < \mu < 50 + 5.841 \times \sqrt{\frac{14/3}{4}}.$$

Trial 想定 2 問目の母分散の区間推定は 確率統計 I(2022)L12 の Quiz 参照.

ここまで来たよ

14 母平均値の区間推定・線形回帰モデルの推定
- 多次元の確率変数の母期待値の推定
- 標本共分散，標本相関係数

14 統計的仮説検定・多次元の確率変数の推定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定

(復習) 多次元の確率変数 岩薩林 確率・統計 §3.3

確率分布 (母分布, 母集団)

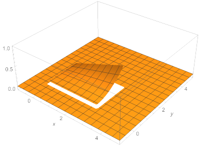
離散型

確率関数 $p(x,y) =$

$y \backslash x$	7	8	9	計
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
1	0	0	$\frac{1}{3}$	
計				

連続型

確率密度関数 $f(x,y) =$



標本 (サイズ n)

離散型

データ番号 i	x	y
1	8	0
2	9	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	8	0

連続型

データ番号 i	x	y
1	1.2	0.95
2	2.5	1.24
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	0.9	0.04

多次元の母期待値の推定は 1 次元と同じのりで

同時分布が与えられたときの母期待値 岩薩林 確率・統計 (3.16)p.60

$$\text{離散型} \quad \mathrm{E}[g(X,Y)] \overset{\text{定義}}{=} \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} g(x,y) \cdot p(x,y)$$

$$\text{連続型} \quad \mathrm{E}[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) \cdot g(x,y) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

1 次元 確率統計 I(2022)L11 $\rightsquigarrow$ 多次元

標本期待値

$$g(X,Y)\text{の標本期待値 } \overline{g(X,Y)} = \frac{1}{n}[g(X_1,Y_1) + \cdots + g(X_n,Y_n)]$$

が, $\mathrm{E}[g(X,Y)]$ の ‘よい’ 推定量になっている.

$g(X,Y)$ が X のみによる場合 $\mathrm{E}[g(X)]$. 周辺分布の推定と思える.

ここまで来たよ

14 母平均値の区間推定・線形回帰モデルの推定

- 多次元の確率変数の母期待値の推定
- 標本共分散，標本相関係数

14 統計的仮説検定・多次元の確率変数の推定

- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定

母分散の推定 (復習)

不偏標本分散 確率統計 I(2022)L11

$$
\text{不偏標本分散 } {S_x}^2 = S_{xx} = \frac{1}{n-1}[(X_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2] = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_i X_i^2 - (\overline{X})^2\right]
$$

が, 母分散 $\mathrm{V}[X]$ の ‘よい’ 推定値になっている.

$\mathrm{V}[Y]$ の推定値は, $S_y^2 = S_{yy}$ と書く.

母共分散の推定

母共分散 covariance 岩薩林 確率・統計 (3.19)p.61,(3.20)p.62

X, Y が確率変数で，$\mu_{\mathrm{X}} = \mathrm{E}[X], \mu_{\mathrm{Y}} = \mathrm{E}[Y]$ とおいたとき，

$$\text{母共分散}\,\mathrm{Cov}[X,Y] \overset{\text{定義}}{=} \mathrm{E}[(X-\mu_{\mathrm{X}})(Y-\mu_{\mathrm{Y}})] \tag{3.19}$$

$$= \boxed{\text{岩薩林 確率・統計 (3.20)}} \cdots = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y]. \tag{C1,(3.20)}$$

不偏標本共分散 岩薩林 確率・統計 なし

不偏標本共分散

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \overline{X}\cdot\overline{Y}\right]$$

が母共分散 $\mathrm{Cov}[X,Y]$ の ‘よい’ 推定値になっている．

L13-Q2

Quiz(多次元の確率変数の母期待値母共分散の推定)

以下は，2 次元の確率変数 X, Y のサイズ $n = 5$ の標本である

X	Y
1	5
3	15
4	14
5	11
7	20

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を推定しよう．
2. 母期待値 $\mathrm{E}[X^2Y]$ を推定しよう．
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を推定しよう．
4. 母共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y]$ を推定しよう．
5. 母相関係数 $\rho[X, Y]$ を推定しよう．

ここまで来たよ

14 母平均値の区間推定・線形回帰モデルの推定
- 多次元の確率変数の母期待値の推定
- 標本共分散, 標本相関係数

14 統計的仮説検定・多次元の確率変数の推定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定

推定 (estimation) と検定 (test)

点推定　μ は値 xx と推定 岩薩林 確率・統計 §6.1

区間推定　μ は値 yy と値 zz の間と推定 (信頼係数 $1-\alpha$ で) 岩薩林 確率・統計 §6.2

仮説検定　μ は値 xx と差がある と, (時々) 断言 (有意水準 α で) =見逃し多いけど発色したら正しい ($1-\alpha$ で) 血痕試験紙 岩薩林 確率・統計 §6.3

あるドーナツ製造器は, 重さ X(確率変数) の母平均値が 55g であるように調整済みだという. しかし, 5 個買ってみたら, 違う感じ. これ, 本当に母平均値 55 g なの?(っていうか 55 g でないと言いたい).

ある学習法を使ってるある生徒の, 毎日のテストでの 1 か月の平均点は 63 点. 自分が別の学習法で教えた 5 日間の平均点は… 自分の方法は優れていると言いたい

検定はだいたいこんな考え方

岩薩林 確率・統計 §6.3

確率変数 X は, 正規分布 $\mathrm{N}(55, 2^2)$ にしたがうという. $\sigma^2 = 2^2$ は確かだとわかってるけど, $\mu = 55$ (帰無仮説) が本当なのか疑っている. サイズ 4 の標本を抽出したところ,

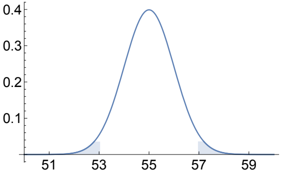
$$54, 57, 57, 60$$

だった. → 標本サイズ $N = 4$, 標本平均値 $\overline{X} = \frac{1}{4}(X_1 + \cdots + X_4) = 57$.

$\overline{X} \sim \mathrm{N}(55, 2^2/4)$.

確率 α(=有意水準) でしか起きないようなまれなことが起きたら (検定統計量 $\overline{X}$ が棄却域にはいったなら)

おかしいと判定する (帰無仮説を棄却する)



帰無仮説と対立仮説

- H_0: 帰無仮説 (null hypothesis) ＝ 背理法の仮定 ＝「真の母平均値 μ は 55g に等しい」
- H_1: 対立仮説 (alternative hypothesis) ＝ 示したい命題 ＝「真の母平均値 μ は 55g でない」

検定 (test)=統計的仮説検定 (statistical hypothesis test)
心理学, 教育学, 社会科学などでは標本サイズを大きくできないことが多い. 小さくても Yes/No の結論を出す, 科学業界で合意された方法.

帰無仮説を棄却する reject
検定統計量の実現値が境目を越えて大きすぎたり小さすぎたりしたら (棄却域にはいったら) 帰無仮説 (=背理法の仮説) が偽, 対立仮説が真と結論する (試験紙が発色した)
帰無仮説を棄却しない accept
実験失敗 (背理法使おうとしたけど矛盾導けなかった). 何も言えない (発色しなかった)

ここまで来たよ

14 母平均値の区間推定・線形回帰モデルの推定
- 多次元の確率変数の母期待値の推定
- 標本共分散, 標本相関係数

14 統計的仮説検定・多次元の確率変数の推定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定

L14-Q1

Quiz(母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定)

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ $X\mathrm{g}$ は, 正規分布にしたがうことがわかっている. 母平均値は $55\mathrm{g}$ だと言われていたが疑っている. きょう 5 個製造したところ, 下のようだった.
$50\mathrm{g}, 50\mathrm{g}, 51\mathrm{g}, 46\mathrm{g}, 48\mathrm{g}.$
ドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ $X\mathrm{g}$ の母平均値が $55\mathrm{g}$ と異なるかどうか, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で統計的仮説検定を行おう.

一般の統計的仮説検定の，レポートや論文での書き方

母集団を決める．母集団の分布タイプを仮定する．使う検定を決める/決まる (将来は自作できる).

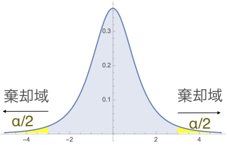
1. 「有意水準 $\alpha = \cdots$ で」「…検定を行う」(2,3 を名前で予告する)
2. 「帰無仮説を…とする」「対立仮説を…とする」
3. 「帰無仮説のもとでナントカ検定統計量 Y は …分布にしたがう」
4. 「この標本に対してナントカ検定統計量の実現値は $y = \cdots$ である」
5. (棄却域の境い目の値を計算しておく)
6. 「‘y 不等号 (境い目)’ より帰無仮説を棄却する/棄却できない」「よって母ナントカは…である/とはいえない」

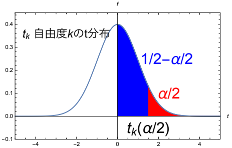
正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定

母平均値の両側 t 検定 岩薩林 確率・統計 定理 7.2(p.159)

前提 母集団が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, 何か)$ にしたがう.

1. 有意水準 α で母平均値の両側 t 検定を行う.
2. 帰無仮説を母平均値 $\mu = \mu_0$, 対立仮説を $\mu \neq \mu_0$ とする.
3. 帰無仮説のもとで, 検定統計量 $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sqrt{S^2/n}}$ は自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう.
4. T の実現値 t を標本平均値 $\overline{X}$, 不偏標本分散 S^2, 標本サイズ n から計算すると $t = \cdots$.
5. 棄却域は $|t| > t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$ である.
6. (結論) 帰無仮説を棄却する/できない, 母平均値は $\mu \neq \mu_0$ と結論する/できない.





t 分布では

$$F^{-1}(1-\alpha) = -F^{-1}(\alpha) = t_k(\alpha).$$

L14-Q1

Quiz 解答: 母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定

1. 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が $\mu_0 = 55\mathrm{g}$ に等しい」すなわち「$\mu = \mu_0$」とする. 対立仮説を「$\mu \neq \mu_0$」とする.
3. サイズ $n = 5$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を S^2 とするとき, 検定統計量
$$T = \frac{\bar{X} - 55}{\sqrt{S^2/5}}$$
は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $5-1$ の t 分布に従う.
4. この標本に対する検定統計量の実現値は,
$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = \frac{49-55}{\sqrt{\frac{1}{5}\frac{16}{5-1}}} = -3\sqrt{5} = -6.708.$
5. 棄却域は $|t| > t_4(0.05/2)$. ppf$(1-0.05/2)$ または t 分布表より $|t| > 2.776$.

6. $|-6.708| > 2.776$ であり, 実現値 t は棄却域に含まれるので, 帰無仮説を棄却する. ドーナツの重さの母平均値は 55g と異なる, と結論する.
(注: このことを,「有意」significant という言葉で表現する人もいる. 結果は有意である, 母平均値 μ は 55g と有意に異なる, 母平均値 μ と 55 の間には有意差がある, 有意な標本である, など)

重さは負にならないし, 正規分布にしたがうというのはおかしな前提だが, ここは練習ってことで. 世の中には変な状況下で強引に t 検定を使う人が多くいるが, 数理の人はおかしさを認識できるように.

岩薩林 確率・統計 例題 7.2(p.159), 問題 2(p.160)

L14-Q2

Quiz(正規分布の母平均値に関する t 検定)

あるコンビニには，ドーナツ販売開始前には，9:00–10:00 に平均 196 人の客が来店していた．ドーナツ販売開始後の 4 日間，来店客数は次の通りだった．$204, 208, 188, 200$
来店者数は正規分布にしたがうと考える．ドーナツ販売開始後に来店客数の母平均値は変化したか? 有意水準 0.05 で考える．

ふつうじゃない TrialL14

授業始めの非参照テストではなく, 2022-07-25 月 19:00 までにアップロードするレポート.

- 練習問題 L14-01, L14-02 に合格して初めて, 個人別レポート問題の取得や提出が可能になる.
- 趣旨: 検定の長い文を (参照ありで) 書けることを確かめる必要. 非参照や短時間のテストで確認することが難しい.

2022-07-18 月は授業なし

集中補講日で, この授業の補講はなし.

定期試験期間中の任意参加授業内試験

2022-08-01 月 1, 60 分, 参照なし. 7-002. 理由を問わず, 欠席したときの追試や配慮はなし.