母比率の片側検定, 仮説検定における p 値

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I　L15(2022-07-25 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-25 Mon 12:38 JST hig"

今日の目標

- 母比率の片側二項検定ができる　岩薩林 確率・統計 §7.3
- p 値を使った検定ができる

L14-Q0
Quiz 解答: 多次元の確率変数の母期待値母共分散の推定

1. 標本平均値 $\overline{X} = \frac{1}{5}[1+3+4+5+7] = 4$ より母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を 4 と推定する．なお，$\overline{Y} = 13$.
2. 標本期待値 $\overline{X^2Y} = \frac{1}{5}[1^2 \cdot 5 + \cdots + 7^2 \cdot 20] = \frac{1619}{5}$ より母期待値 $\mathrm{E}[X^2Y]$ を $\frac{1619}{5}$ と推定する．
3. 不偏標本分散 $S_x^2 = S_{xx} = \frac{1}{5-1}[(1-4)^2 + \cdots + (7-4)^2] = \frac{20}{4}$ より母分散 $\mathrm{V}[X]$ を 5 と推定する．なお，$S_y^2 = S_{yy} = \frac{122}{4}$
4. 不偏標本共分散 $S_{xy} = \frac{1}{5-1}[(1-4)(5-13) + \cdots + (7-4)(20-13)] = \frac{41}{4}$ より母共分散 $\mathrm{Cov}[X,Y] = \frac{41}{4}$ と推定する．
5. 標本相関係数 $r_{xy} = \dfrac{41/4}{\sqrt{20/4}\sqrt{122/4}} = 0.83$ より母相関係数 $\rho[X,Y]$ を 0.83 と推定する．

L14-Q0

Quiz 解答: 母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定

1. 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が $\mu_0 = 55\mathrm{g}$ に等しい」すなわち「$\mu = \mu_0$」とする. 対立仮説を「$\mu \neq \mu_0$」とする.
3. サイズ $n = 5$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を S^2 とするとき, 検定統計量
$$T = \frac{\bar{X} - 55}{\sqrt{S^2/5}}$$
は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $5 - 1$ の t 分布に従う.
4. この標本に対する検定統計量の実現値は,
$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = \frac{49 - 55}{\sqrt{\frac{1}{5}\frac{16}{5-1}}} = -3\sqrt{5} = -6.708.$
5. 棄却域は $|t| > t_4(0.05/2)$. ppf$(1 - 0.05/2)$ または t 分布表より $|t| > 2.776$.

6. $|-6.708| > 2.776$ であり，実現値 t は棄却域に含まれるので，帰無仮説を棄却する．ドーナツの重さの母平均値は 55g と異なる，と結論する．
(注: このことを，「有意」significant という言葉で表現する人もいる．結果は有意である，母平均値 μ は 55g と有意に異なる，母平均値 μ と 55 の間には有意差がある，有意な標本である，など)

L14-Q0

Quiz 解答: 正規分布の母平均値に関する t 検定

1. 有意水準 0.05 で，正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う．
2. 帰無仮説を「ドーナツ販売開始後の，来店客数の母平均値 μ は 196 に等しい」，すなわち $\mu = 196$ とする．対立仮説を $\mu \neq 196$ とする．

3. サイズ n の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を S^2 とすると, 検定統計量
$$T = \frac{\bar{X} - 196}{\sqrt{S^2/4}}$$
は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $n-1$ の t 分布に従う.
4. この標本の実現値は $\bar{X} = 200, S^2 = \frac{224}{4-1} = 74.7$. よって, $t = \frac{200-196}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{224}{3}}} = 0.92582.$
5. t 分布表より, 棄却域は $|t| > t_3(0.05/2)$ すなわち, $|t| > 3.182.$
6. $|0.92582| < 3.182$ であり, この標本の実現値は棄却域に含まれないので, 帰無仮説は棄却できない. 来店客数の母平均値が変化したとは結論できない.
(注: 結果は有意でなかった, 母平均値 μ と 196g の間には有意差がない, など).

ここまで来たよ

15 統計的仮説検定・多次元の確率変数の推定

16 母比率の片側検定, 仮説検定における p 値
- 片側検定
- 母比率の検定＝二項検定 (の正規近似)
- p 値＝有意確率
- 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

母平均値の検定・母比率の検定

	両側	片側
母平均値	**両側 t 検定** 確率統計 I(2022)L14 岩薩林 確率・統計 問題 2(p.160) 前回の授業	**片側 t 検定** 岩薩林 確率・統計 例題 7.2(p.159)
母比率	**両側二項検定** 岩薩林 確率・統計 練習問題 2(p.173)	**片側二項検定** 確率統計 I(2022)L15 岩薩林 確率・統計 例題 7.7(p.172) 岩薩林 確率・統計 例題 7(p.172) 岩薩林 確率・統計 練習問題 3(p.173) 今回の授業

L15-Q1

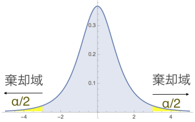
Quiz(母平均値の片側検定 (母分散未知)=片側 t 検定)

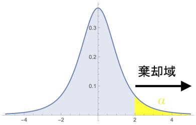
あるドーナナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ Xg は，正規分布にしたがうことがわかっている．もともと母平均値は 55g に調整されていたが，1 個あたりの重さを減らすはずの自己流調整を行った．
その後 5 個製造したところ，下のようだった．
$55\text{g}, 54\text{g}, 52\text{g}, 52\text{g}, 52\text{g}.$
ドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ X_ig の母平均値が 55g より本当に小さくなったかどうか，有意水準 $\alpha = 0.05$ で統計的仮説検定を行おう．

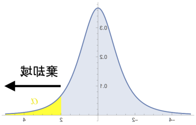
片側検定と両側検定 岩薩林 確率・統計 p.150

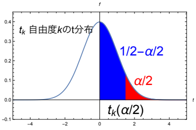
- 片側・両側検定の帰無仮説 $\mu = \mu_0$.
- 片側 t 検定の対立仮説 $\mu > \mu_0 (\mu < \mu_0)$
- 両側 t 検定の対立仮説 $\mu \neq \mu_0$

片側検定では，どちらか片側だけに確率=面積 α の棄却域ができる．実現値がここにはいったら帰無仮説を棄却．
両側検定のときは，両側に確率=面積 $\alpha/2$ ずつの棄却域ができる．実現値がいずれかにはいったら帰無仮説を棄却．

両側


片側


片側




ここまで来たよ

15 統計的仮説検定・多次元の確率変数の推定

16 母比率の片側検定, 仮説検定における p 値

- 片側検定
- 母比率の検定=二項検定 (の正規近似)
- p 値=有意確率
- 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

母比率の検定 I

p と書いてた母比率，二項分布の $\mathrm{B}(p,n)$ の p を，今日は r と書きます

Example (母比率の検定のアイデア)

このマジック用コインは表の出る確率 (母比率)$r = 3/5$ だと言われているが，もっと表が出る気がする．
50 回投げた (サイズ $n = 50$ のサンプル) ところ，表 $T = 35$ 回表が出た．
こんな「稀な」ことが起きるってことは，そうに違いない!

$\rightsquigarrow$ これ，統計的仮説検定として定式化できる考え方
前提 表が出る回数 $T \sim \mathrm{B}(r,n)$.
帰無仮説 $r = \frac{3}{5}$ ，対立仮説 $r > \frac{3}{5}$.
帰無仮説 (背理法の仮定) のもとで，$T = 35$ はとても稀 (矛盾) と言いたい． 確率統計 I(2022)L14

$$P(T=35) = \frac{50!}{35!(50-35)!}\left(\frac{3}{5}\right)^{35}\left(1-\frac{3}{5}\right)^{50-15} = 0.04155 \quad \text{稀じゃん}$$

母比率の検定 II

ちょっと待て. 特定の回数が出ることじたい稀. 上の確率は
$1/$場合の数 $= 1/51 = 0.0196$ より大きい.
もっともらしい $50 \cdot \frac{3}{5}$ 回

$$P(T = 30) = \frac{50!}{35!(50-35)!}\left(\frac{3}{5}\right)^{35}\left(1 - \frac{3}{5}\right)^{50-15} = 0.11456$$

だって稀じゃん?
これ (=35) 以上に極端なことが起きる確率を考えよう.

$$P(35 \leq T \leq 50) = \sum_{k=35}^{50} P(T = k)$$

16 個も加えるの?

母比率の検定 III

正規近似による計算 確率統計 I(2022)L10

$\mathrm{E}[T] = 50 \cdot \frac{3}{5} = 30, \mathrm{V}[T] = 50 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = 12.$
中心極限定理より，'近似的に' $T \sim \mathrm{N}(30, 12)$. $Z = \frac{T-30}{\sqrt{12}} \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$.

$$\begin{aligned} P(35 \leq T \leq 50) =& P(\tfrac{35-30}{\sqrt{12}} \leq Z \leq +\infty) \\ =& F_Z(\infty) - F_Z(\tfrac{35-30}{\sqrt{12}}) \\ =& 1 - \mathsf{cdf}(\tfrac{35-30}{\sqrt{12}}) = 1 - 0.9251 = 0.0749. \end{aligned}$$

確率統計 I(2022)L05

$P(T \geq 35) = 0.0749$ (これがあとで出てくる p 値) が稀と思うかは主観．
けんかにならないように，計算し始める前に基準を決めておく．それが，
有意水準 $\alpha = 0.05$ or 0.01.

母比率の検定 IV

上で出てきた, Z は, 分子分母を $n = 50$ で割ると,

$$\frac{35-30}{\sqrt{12}} = \frac{\frac{35}{50}-\frac{30}{50}}{\sqrt{\frac{1}{50}\frac{3}{5}\frac{2}{5}}} = \frac{\hat{r}-r_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\cdot r_0\cdot(1-r_0)}}$$

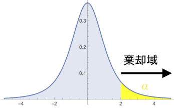
という, 母比率の区間推定の導出に似た形になる.
ただし, 平方根の中にあるのは帰無仮説の母比率 r_0, 標本比率は $\hat{r}$.

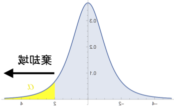
母比率の片側 (二項) 検定 (の正規近似) 岩薩林 確率・統計 定理 7.6(p.171)

前提 $T \sim \mathrm{B}(r, n)$.

1. 有意水準 α で正規近似による母比率の片側 (二項) 検定を行う.
2. 帰無仮説を母比率 $r = r_0$, 対立仮説を母比率 $r > r_0$ (or $r < r_0$) とする.
3. 帰無仮説のもとで検定統計量 $Z = \frac{T - nr_0}{\sqrt{nr_0(1-r_0)}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{r_0(1-r_0)/n}}$ は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう (n 大のとき).
   $\hat{r} = \frac{T}{n}$: 標本比率, r_0: (帰無仮説の) 母比率.
4. この標本に対して検定統計量の実現値は…
5. 棄却域は $z > z(\alpha)$ (or $z < -z(\alpha)$).
6. 「(…) より帰無仮説を棄却する/できない. よって母比率 $r > r_0$ (or $r < r_0$) と結論する/できない.

上側, 下側

片側 

片側 

L15-Q2

Quiz(母比率の片側検定)

あるスピードくじ (「あたり」と「はずれ」だけがある) は, あたりの母比率 r は $\frac{1}{10}$ に等しいと言われている. しかし, 実際の r はこれより大きいのではないかと疑っている.
くじを 100 本ひいたところ, 15 本があたりだった.
有意水準 $\alpha = 0.05$ で母比率の検定を行おう.

岩薩林 確率・統計 例題 7.7, 問題 8(p.172), 第 7 章練習問題 2,3

L15-Q3

Quiz(母比率の片側検定)

あるスピードくじ (「あたり」と「はずれ」だけがある) は, あたりの母比率 r は $\frac{1}{10}$ に等しいと言われている. しかし, 実際の r はこれより小さいのではないかと疑っている.
くじを 100 本ひいたところ, 5 本があたりだった.
有意水準 $\alpha = 0.01$ で母比率の検定を行おう.

ここまで来たよ

15 統計的仮説検定・多次元の確率変数の推定

16 母比率の片側検定, 仮説検定における p 値
- 片側検定
- 母比率の検定=二項検定 (の正規近似)
- p 値=有意確率
- 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

p 値=有意確率による棄却する/しない判定 岩薩林 確率・統計 p.152

検定の Step6 では，T や Z が極端かどうか判定している

$T=35 \Leftrightarrow Z=\frac{35-30}{\sqrt{12}}$ が棄却域 ($\alpha=0.05$) に入っているか?

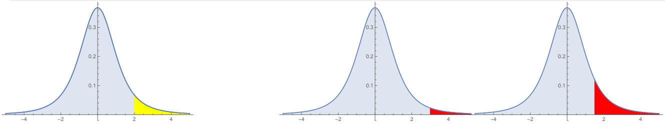
$\Updownarrow$

p 値 $P(T \geq 35)=P(z \geq \frac{35-30}{\sqrt{12}})$ が有意水準 α より小さいか?

標本の p 値 (p-value)=有意確率 岩薩林 確率・統計 p.152

帰無仮説のもとで，検定統計量がこの標本よりも極端な値をとる確率=端側の面積

$\alpha > p$ のとき帰無仮説を棄却



p-値 $=1-F(z)$ は，z の減少関数.

棄却域: z の大小で比較 $\leftrightarrow$ p 値: $1-F(z)$ の小大で比較

統計的仮説検定での p 値による棄却判定

1. 有意水準 α で正規近似による母比率の片側 (二項) 検定を行う.
2. 帰無仮説を母比率 $r = r_0$, 対立仮説を母比率 $r > r_0$ (or $r < r_0$),
3. 帰無仮説のもとで検定統計量 $Z = \frac{T - nr_0}{\sqrt{nr_0(1-r_0)}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{r_0(1-r_0)/n}}$ は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう (n 大のとき). $\hat{r}$ 標本比率, r_0 (帰無仮説の) 母比率
4. この標本に対して検定統計量の実現値は$\cdots$
5. ~~棄却域は $z > z(\alpha)$.~~ p 値は $P\left(Z > \frac{T - nr_0}{\sqrt{nr_0(1-r_0)}}\right)$ or $P\left(Z < \frac{T - nr_0}{\sqrt{nr_0(1-r_0)}}\right)$.
6. 「~~$(\cdots)$~~(上下共通) p 値 $<$ / $\geq \alpha$ より帰無仮説を棄却する/できない. よって母比率 $r > r_0$ と結論する/できない.

さっきの問を p 値で再度やってみよう.

ここまで来たよ

15 統計的仮説検定・多次元の確率変数の推定

16 母比率の片側検定, 仮説検定における p 値
- 片側検定
- 母比率の検定＝二項検定 (の正規近似)
- p 値＝有意確率
- 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

母分布についての真実と, 検定での棄却の有無

	帰無仮説を棄却, 有意である	帰無仮説を棄却できない, 有意でない
対立仮説が成立 $\mu \neq \mu_0$	確率 $1-\beta$	第 2 種の過誤 確率 β
帰無仮説が成立 $\mu = \mu_0$	第 1 種の過誤 確率 α	確率 $1-\alpha$

$1-\alpha$, $1-\beta$ はどちらも大きくしたいが, 両立しない.
α はほぼゼロ ($\alpha = 0.01$ or 0.05) に固定して, $1-\beta$ をなるべく大きくするように試みる習慣.
見逃し率: β. 検出力:$1-\beta$.
誤検出率, 有意水準, 危険率: α.

定期試験期間に行う任意参加試験

- 2022-08-01 月 9:15-10:15, 7-002
- 定期試験ではないので，遅延や感染による配慮や追試はありません
- 要学生証，個人別座席指定

出題計画

- Trial L01–L08 の出題計画をあわせたもの
- すべて持込不可
- 岩薩林 確率・統計 pp. xii,xiii の公式集を印刷して配布

成績評価方法のお知らせ (2022-06-07) に始まる Teams 一般 ch のスレッドを参照.