# 二項分布, 独立同分布の和

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I　L09(2023-06-05 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2023-06-05 Mon 07:43 JST hig"

今日の目標

- 二項分布の母期待値, 母分散, 確率を求められる 岩薩林 確率・統計 §3.4
- 独立同分布にしたがう確率変数の和の母平均値，母分散を求められる 岩薩林 確率・統計 §4.4

## L08-Q1
### Quiz 解答:2 次元の独立でない確率変数の母期待値

1. $\mathrm{E}[(X+2)(Y+3)] = \mathrm{E}[XY+3X+2Y+6] = \mathrm{E}[XY]+3\mathrm{E}[X]+2\mathrm{E}[Y]+6\mathrm{E}[1] = 25+9+20+6 = 60.$
2. $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] = 25-3\cdot 10 = -5.$
   $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[(X-\mu_{\mathrm{X}})(Y-\mu_{\mathrm{Y}})]$ を展開しても同じ結果.

## L08-Q2
### Quiz 解答: 独立な確率変数の母期待値

1. $X,Y$ は独立なので $\mathrm{E}[XY] \overset{\text{IE1}}{=} \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] = 2\cdot 3.$
2. $X,Y$ は独立なので $\mathrm{Cov}[X,Y] \overset{\text{IC1}}{=} 0.$
3. $\mathrm{E}[(-2X+3Y)(X+5Y)] \overset{\text{E5}}{=} \mathrm{E}[-2X^2]+\mathrm{E}[-7XY]+\mathrm{E}[15Y^2] \overset{\text{V1,IE1}}{=} -2(\mathrm{V}[X]+\mathrm{E}[X]^2)-7\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]+15(\mathrm{V}[Y]+\mathrm{E}[Y]^2) = 240.$

4. $X, Y$ は独立なので $\mathrm{V}[g_1(X)+g_2(Y)] \overset{\text{IC2}}{=} \mathrm{V}[g_1(X)]+\mathrm{V}[g_2(Y)]$ であることに注意して,
$\mathrm{V}[-2X+3Y] \overset{\text{IC2}}{=} \mathrm{V}[-2X]+\mathrm{V}[3Y] \overset{\text{V2}}{=} (-2)^2\mathrm{V}[X]+3^2\mathrm{V}[Y]=119.$

## L08-Q3
## Quiz 解答: 同分布の確率母期待値母分散

1.

| $x_2 \backslash x_1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $1-p$ | 0 |
| 1 | 0 | $p$ |

| $x_1+x_2$ | 確率 |
|---|---|
| 0 | $1-p$ |
| 1 | 0 |
| 2 | $p$ |

1. $P(X_1=X_2=1)=p.$
2. $\mathrm{E}[X_1+X_2]=\mathrm{E}[X_1]+\mathrm{E}[X_2]=2p.$
3. $\mathrm{V}[X_1+X_2]=\mathrm{E}[(X_1+X_2)^2]-\mathrm{E}[X_1+X_2]^2=2^2p-(2p)^2=4p(1-p).$
4. $\mathrm{Cov}[X_1,X_2]=\mathrm{E}[X_1X_2]-\mathrm{E}[X_1]\mathrm{E}[X_2]=p-p^2=p(1-p)=\mathrm{V}[X_1].$

2.

| $x_2 \backslash x_1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $(1-p)^2$ | $p(1-p)$ |
| 1 | $(1-p)p$ | $p^2$ |

| $x_1 + x_2$ | 確率 |
|---|---|
| 0 | $(1-p)^2$ |
| 1 | $2p(1-p)$ |
| 2 | $p^2$ |

1. $P(X_1 = X_2 = 1) = p_{X_1 x_1} \times p_{X_2 x_2} = p^2$.
2. $\mathrm{E}[X_1 + X_2] = \mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_2] = 2p$.
3. $\mathrm{V}[X_1 + X_2] = \mathrm{V}[X_1] + \mathrm{V}[X_2] = 2p(1-p)$.
4. $\mathrm{Cov}[X_1, X_2] = \mathrm{E}[X_1 X_2] - \mathrm{E}[X_1]\mathrm{E}[X_2] = p^2 - p^2 = 0$.

# ここまで来たよ

8 確率変数の独立, 独立同分布

9 二項分布, 独立同分布の和
- 二項分布
- 独立同分布にしたがう確率変数の和
- ベルヌーイ分布と二項分布・独立同分布の性質の応用
- チェビシェフの不等式

# 復習+ちょっと ($x$ で書かれた確率関数) I

L09-Q1

## Quiz(離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率)

整数に値をとる離散型確率変数 $X$ は次の確率分布に従う.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{55} & (0 \leq x \leq 10) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 確率 $P(X \leq 5)$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

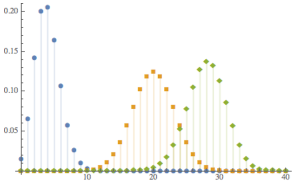
# 二項分布 高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 §3.4

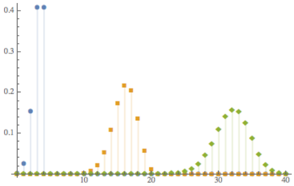
## 定義 (二項分布 岩薩林 確率・統計 (3.24)p.66)

離散型確率変数 $X$ が次の確率分布を持つとき, $X$ はパラメタ $n, p$ の二項分布 $\mathrm{B}(n,p)$ にしたがうという.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x (1-p)^{n-x} & (x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

意味: 確率 $p$ で表の出るコインを $n$ 回投げたとき, $x$ 回表が出る確率.




$${}_n\mathrm{C}_x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$\mathrm{B}(40, 0.1), \mathrm{B}(40, 0.5), \mathrm{B}(40, 0.7)$, $\mathrm{B}(4, 0.8), \mathrm{B}(20, 0.8), \mathrm{B}(40, 0.8)$

# 二項分布 $\mathrm{B}(n, p)$ の Python での扱い

Google Colab on Moodle

```
from scipy import stats

# 二項分布 = binomial distribution
# scipy.stats.binom(n=10,p=0.3) 確率分布名=binom(n,p)
rvx=stats.binom(n=10,p=0.3)

# 確率(質量)関数 probability mass function 離散型に使う用語
rvx.pmf(x) # =p(x)

# 累積分布関数
rvx.cdf(x)

# 母平均値
rvx.mean()
```

## 命題 (二項分布の母平均値と母分散 岩薩林 確率・統計 定理 3.1(p.70))

$$\mathrm{E}[X] = \boxed{np}, \mathrm{V}[X] = \boxed{np(1-p)}$$

(証明延期)

$\mathrm{E}[1] =$ 岩薩林 確率・統計 式 (3.26)–(3.27)

## 定理 (二項定理 高校 数学 A 岩薩林 確率・統計 (3.25)p.68)

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_x a^x b^{n-x}$$

## L09-Q2

### Quiz(二項分布)

確率 $p = \frac{2}{3}$ で表のでるコインを 100 回投げる.

1. 表がでる回数 $X$ は確率変数である. $X$ のしたがう確率分布を答えよう.
2. 表が 40 回でる確率を求めよう. 階乗 $n!$ とべき乗 $a^b$ と分数 $\frac{a}{b}$ は簡単化・約分しなくてよい. P,C などの記号は使わないで答えること.
3. 表がでる回数の母平均値, 母分散を求めよう.

## L09-Q3

### Quiz(二項分布または独立同分布)

あるスーパーのおでんセット 1 パックには, 確率 $\frac{7}{10}$ で卵が 2 個, 確率 $\frac{3}{10}$ で卵が 0 個 (!) 入っている. おでんセットを 10 パックを買ったときに得られる卵の合計の個数を確率変数 $Y$ とする. 各パックの卵の個数は独立とする.

1. 10 パック中 $X$ パックが卵 2 個入りとする. $Y$ を $X$ で表そう. $X$ のしたがう確率分布を答えよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[Y]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[Y]$ を求めよう.
4. 確率 $P(Y = 16)$ を求めよう.

# ここまで来たよ

# 独立同分布

$X = X_1, Y = X_2$ は独立同分布 定義: 独立かつ同分布

例: 形の同じ青色コイン $X_1$ と赤色コイン $X_2$.
表がでる (1) の確率 $p$

| $x_2 \backslash x_1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $(1-p)^2$ | $p(1-p)$ |
| 1 | $p(1-p)$ | $p^2$ |

## 定義 (独立同分布 (i.i.d.) 岩薩林 確率・統計 定理 4.2(p.87) の仮定,p.113 )

離散型/連続型確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が, たがいに独立で, すべて同分布に従う (同じ周辺分布 $p_{\mathrm{X_i}}(x_i) = p(x)$ を持つ) とする.
このとき $X_1, \ldots, X_n$ は独立同分布に従う (i.i.d.=independent and identically-distributed) という.

母期待値も共通になる. $\mathrm{E}[X_i] = \mu, \mathrm{V}[X_i] = \sigma^2$.
例: 同じ形の $n$ 色のサイコロ. $X_1$=青色, $X_2$=緑色, $\cdots$.

## L09-Q4

### Quiz(同分布の確率母期待値母分散)

$X_1, X_2$ は同分布にしたがう確率変数で，コインの表 (1) 裏 (0) を表す．確率関数は，

$$p_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 1-p & (x=0) \\ p & (x=1) \end{cases},$$

母平均値・母分散は

$$\mathrm{E}[X_i^k] = 0^k \cdot (1-p) + 1^k \cdot p = p, \mathrm{V}[X_i] = \mathrm{E}[X_i^2] - \mathrm{E}[X_i]^2 = p - p^2.$$

1. $X_1 = X_2$ であるとき (1 枚のコインに 2 個の名前をつけたとき),
   1. 確率 $P(X_1 = X_2 = 1)$ を求めよう．
   2. 母平均値 $\mathrm{E}[X_1 + X_2]$ を求めよう．
   3. 母分散 $\mathrm{V}[X_1 + X_2]$ を求めよう．
   4. 母共分散 $\mathrm{Cov}[X_1 + X_2]$ を求めよう．
2. $X_1, X_2$ が独立であるとき (形は同じだが色の違う別々のコインであるとき),
   1. 確率 $P(X_1 = X_2 = 1)$ を求めよう．
   2. 母平均値 $\mathrm{E}[X_1 + X_2]$ を求めよう．
   3. 母分散 $\mathrm{V}[X_1 + X_2]$ を求めよう．
   4. 母共分散 $\mathrm{Cov}[X_1 + X_2]$ を求めよう．

# 独立同分布にしたがう確率変数の和の性質 岩薩林 確率・統計 例題 4.6

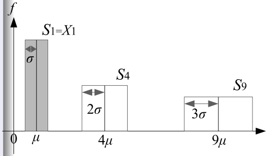
## 命題 (i.i.d にしたがう確率変数の和)

$X_1, \ldots, X_n$: i.i.d. 母平均値 $\mathrm{E}[X_i] = \mu$, 母分散 $\mathrm{V}[X_i] = \sigma^2$ .
和の確率変数 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

$$\mathrm{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] \overset{\text{同分布}}{=} n \times \mu.$$

$$\mathrm{V}[S_n] \overset{\text{独立}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}[X_i] \overset{\text{同分布}}{=} n \times \sigma^2$$

$S_n$ の確率 (密度) 関数はこんな感じ?



# L09-Q5

## Quiz(独立同分布にしたがう確率変数の和)

ダーツで, 1 回投げるごとに点数が得られ, $n$ 回投げた合計点で競うルールでプレイしている.
あるプレイヤーの $i$ 回目の点数を確率変数 $X_i$ とすると, $X_i$ は独立同分布にしたがい, $\mathrm{E}[X_i] = 80, \mathrm{V}[X_i] = 200$ だという.
このプレイヤーが $n$ 回投げた合計点を確率変数 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とする.

1. $\mathrm{E}[S_{10}]$, $\mathrm{V}[S_{10}]$ を求めよう.
2. $\mathrm{E}[\frac{1}{10}S_{10}]$, $\mathrm{V}[\frac{1}{10}S_{10}]$ を求めよう.
3. $\mathrm{E}[\frac{1}{100}S_{100}]$, $\mathrm{V}[\frac{1}{100}S_{100}]$ を求めよう.

# ここまで来たよ

8. 確率変数の独立, 独立同分布

9. 二項分布, 独立同分布の和
   - 二項分布
   - 独立同分布にしたがう確率変数の和
   - ベルヌーイ分布と二項分布・独立同分布の性質の応用
   - チェビシェフの不等式

# ベルヌーイ分布

## 定義 (ベルヌーイ分布 岩薩林 確率・統計 名前は出てこない)

$n = 1$ の二項分布 $\mathrm{B}(1, p)$ をパラメタ $p$ のベルヌーイ分布という.

$$P(X = x) = p(x) = p^x \cdot (1-p)^{1-x} = \begin{cases} 1-p & (x = 0) \\ p & (x = 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

意味: ベルヌーイ試行=(不公平な) コイン投げ. 表がでる確率 $p$. 表 $x = 1$.

## 命題 (ベルヌーイ分布のモーメントと母平均値と母分散)

$$\mathrm{E}[X^k] = \boxed{p} \ (k = 1, 2, \ldots), \quad \mathrm{V}[X] = \boxed{p(1-p)}.$$

## 命題 (ベルヌーイ分布と二項分布のもうひとつの関係)

岩薩林 確率・統計 例題 4.6 の最初の 1 文

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立同分布 $\mathrm{B}(1,p)$ にしたがうとき, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ は $S_n \sim \mathrm{B}(n,p)$.

なぜなら

$X_i$ は 1 枚のコインのうち表が出た枚数. $S_n$ は $n$ 枚のコインのうち表が出た枚数.

# 二項分布の母平均値・母分散の導出

$X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{B}(1, p)$ とすると, $\mathrm{E}[X_i] = p, \mathrm{V}[X_i] = p(1-p)$.

このとき, 独立同分布の和 確率統計 I(2022)L09 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{B}(n, p)$ に対して,

$\mathrm{E}[S_n] = \mathrm{E}[X_1] + \cdots + \mathrm{E}[X_n] \overset{\text{同分布}}{=} n \times p$

$\mathrm{V}[S_n] \overset{\text{独立}}{=} \mathrm{V}[X_1] + \cdots + \mathrm{V}[X_n] \overset{\text{同分布}}{=} n \times p(1-p)$.

## L09-Q6
## (Q3 と同じ問を別解法で)

# ここまで来たよ

8 確率変数の独立, 独立同分布

9 二項分布, 独立同分布の和
- 二項分布
- 独立同分布にしたがう確率変数の和
- ベルヌーイ分布と二項分布・独立同分布の性質の応用
- チェビシェフの不等式

# チェビシェフの不等式

## チェビシェフの不等式 Chebyshev's inequality 岩薩林 確率・統計 §4.3(4.15)

$X$ を離散型または連続型確率変数とする. $\mu = \mathrm{E}[X]$ : 母平均値, $\sigma^2 = \mathrm{V}[X]$: 母分散
$a > 0$: 任意の正の実数.
このとき次が成立する.

$$P(|X - \mu| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}$$

どんな $X$ にも使えて便利な不等式. これが母平均値・母標準偏差のひとつの意味づけ.

$a > 1$ と思う. 母平均値 $\mu$ からの距離が母標準偏差 $\times a$ 以上離れた値が出る確率は, $1/a^2$ 以下. 母平均値から離れるほど, 確率は小さい. 母標準偏差 $\sigma$ は離れ方の基準 (分布の幅).

# チェビシェフの不等式の証明 (離散型)

$\mathrm{E}[X]=\mu, \mathrm{V}[X]=\sigma^2$ とする.

$$g(x)=\begin{cases}1 & (|x-\mu|\geq a\sigma)\\ 0 & (|x-\mu|<a\sigma)\end{cases}$$

とおく. 意味のわからない $\mathrm{E}[g(X)\cdot(X-\mu)^2]$ を定義に戻って書くと,

$$\begin{aligned}(a\sigma)^2\times P(|X-\mu|\geq a\sigma) &=(a\sigma)^2\sum_{\mu-a\sigma\leq x\leq\mu+a\sigma}p(x)\\ &=\sum_x g(x)\cdot(a\sigma)^2\,p(x)\\ &\leq\sum_x g(x)\cdot(x-\mu)^2\,p(x)\\ &\leq\sum_x (x-\mu)^2\,p(x)=\mathrm{V}[X]=\sigma^2\end{aligned}$$

連続型での証明 岩薩林 確率・統計 §4.3