

# 離散型確率変数

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L01(2024-04-15 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2024-04-15 Mon 06:33 JST hig"

## 今日の目標

- 科目の目標/合格条件を説明できる, Moodle 使える
- 岩薩林 確率・統計 §3.1 離散型確率変数とは何か説明できる
- 岩薩林 確率・統計 §3.2 離散型確率変数の確率, 母平均値, 母分散, 母期待値が計算できる



## ここまで来たよ

- はじめに
  - この授業どんなのり?
  
- ① 離散型確率変数
  - 離散型確率変数
  - 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差
  - 事象と確率

## 学習目標

講義概要 → シラバス

現実世界の現象を理解し、数理モデルとの関係を明らかにするためには、観察・実験により取得したデータを整理・解析することが必要である。限られたデータから数理モデルのパラメタを推測する推測統計と、必要な確率論を説明する。

到達目標 → シラバス

- 確率論:1変数、2変数の離散型、連続型確率変数の期待値や確率の計算ができる → 1Q 各回のトライアル
- 推測統計: 実験・観察により取得したデータから数理モデルのパラメタを推測して、根拠とともに他者に説明ができる → 2Q 各回のトライアル

きょうは1変数離散型

## 確率統計 I を履修してはいけない理由

次のどれも響かない人は履修しないことを奨めます。

- データサイエンスプログラムの前提科目 (データ分析, 確率統計 I, 多変量解析及び実習, 機械学習 I, II, 確率統計 II, III, 確率モデル及び実習)
- 数学の教員免許の必修科目
  - ▶ 高校 数学 I (データの分析) = 毎年センター試験に出題, 高校 数学 A (場合の数と確率), 高校 数学 B (確率分布と統計的推測) (選択)
  - ▶ 高校の 高校 数学 I に統計的仮説検定が来る
- いま, データサイエンス, 統計が熱い!
- いま, 機械学習, 人工知能 (AI) が熱い! 線形代数と確率が必要
- 統計は科学技術の言葉  $\rightsquigarrow$  数理卒は当然期待されてる
- 科目に合格したら統計検定 2 級の 6 合目くらいまで来た?

## こんなことに答えます

- ① 「データ分析」で伏線はりまくったけど、どこで回収するの? 推測統計 (確率統計) ↔ 記述統計 (データ分析)
- ② (ゲーム運営) このガチャの確率の設定で、プレイヤーのレベルってどのくらいあがる?
- ③ YouTube から猫の動画を見つけるアルゴリズム, こう改良して, 100 個の入力画像で試したら, 判定精度が 3 個分あがった. これたまたま? 10000 個でやり直すべき?
- ④ 秋元 P は日向坂に櫻坂より身長高いメンバーをいれてる説を唱えたけどみんな信じてくれない…どうやって説得する?

### (再掲) 到達目標 → シラバス

- 確率論: 1 変数、2 変数の離散型、連続型確率変数の期待値や確率の計算ができる → 1Q 各回のトライアル
- 推測統計: 実験・観察により取得したデータから数理モデルのパラメタを推測して、根拠とともに他者に説明ができる → 2Q 各回のトライアル

# ピーナッツカウント (成績計算) ののり

## 成績計算

難しくないけどとにかく注文の多い科目です…

科目の成績 100 ピーナッツは

- 25 ピーナッツ: 平常点 毎週の Web の練習問題, チーム課題, 授業時間内の活動, それほ  
どたいへんじゃないレポートなど
- 75 ピーナッツ: 小テスト 毎週 9:15 からのトライアル=5 ピーナッツ x15 回

(任意の受験で) 統計検定 3 級に合格した人は,

小テスト Q1, Q2 各 30 ピーナッツ (以上) とみなします. → 2023, 2024 年度は換算は行いま  
せん.

75 ピーナッツ: 小テストのうち, 1Q(40) 2Q(35) どちらかが, 50%未満のときは無条件に科目  
を不合格とします (2つの到達目標のうち 1 個しか達成していないから)

欠席届 毎回出席を前提に進めます. 欠席に事前連絡は不要. やむを得ず欠席して, ピーナツ  
的に考慮されたい場合は事後 2 週間以内に LearnMoodle に届けてください

## 週サイクルののり

説明—時間内 (チーム) 課題—週内 Web 練習問題—(翌週) トライアル  
今週を例に.

- 2024-04-15 月 対面授業 来週のトライアルを予告, チーム課題で練習
- 2024-04-16 火 9:20 ごろ-2024-04-19 金 20:00 LearnMoodle の練習問題
- 2024-04-16 火 4,14 木昼 オフィスアワー 1-507
- 2024-04-22 月 09:15(10 分間くらい) トライアル 非参照 非相談

数学系の 2 年次以上科目は週 1 コマしかない!

(週 1 コマ相当) 自分で演習問題を見つけて, 自分で解き, わからない点があったら  
自分から相談したり質問したりする

## 授業ののり (教科書やその他の準備)

<https://hig3.net>

- → 確率統計 I (配布資料).

- →

LearnMoodle <https://learn.hig3.net>  
(Google でログイン) → 確率統計 I

- ▶ → Teams

教科書 必須です. 岩薩林 確率・統計 (3.2) は式 (3.2) と  
いうこと.

岩佐-薩摩-林 理工系の数理 確率・統計, 裳華房  
(2018)



<https://hig3.net>



## 座席指定

チーム別エリア座席指定. チームはプロジェクト演習と同じ.

### ノート

教科書や紙配布資料に書き込む + 自分で問題を解いた過程をノートやルーズリーフに残す, ことをお奨めします.

ノート PC ノート PC とイヤフォンを毎回持参していただきます.

### 担当者ののり

- なまえ: 樋口さぶろお [hig@math.ryukoku.ac.jp](mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp) メールはいつでも.
- へや: 1-507
- Web ページ. <https://hig3.net>
- オフィスアワー 前期火 4 木昼, 1-507 or Teams chat a00010

### 相談できるところ

- Math ラウンジ (1 号館 5 階 1-536,538), 昼休みはだいたい大学院生常駐. 数理 TM-Math ラウンジ ch on Teams.

## ここまで来たよ

- はじめに
  - この授業どんなのり?

- ① 離散型確率変数
  - 離散型確率変数
  - 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差
  - 事象と確率

## 高校の確率

### 文章から確率を求める問題 高校 数学 A

トランプを1枚、同じ確からしさで引く.

結果	確率
♥1	$\frac{1}{52}$
♥2	$\frac{1}{52}$
⋮	⋮
♠13	$\frac{1}{52}$
計	1

偶数のカードの確率は?  $\frac{24}{52}$ .

## 離散型確率変数

岩薩林 確率・統計 §3.1

### 高校数学でよく見る確率の問題 高校 数学 A

袋に赤玉 2 個, 白玉 3 個がはいっている. いちどに 3 個取り出したとき, 赤玉が  $x$  個である確率は ?

$X$  は **離散型** の **確率変数** 離散型  $\approx$  整数値

**事象** は  $x$  の集合  $\{0, 1, 2, 3\}$  の部分集合.

## 言葉 確率分布 (確率関数)

岩薩林 確率・統計 (3.1)p.49

$x_k$	確率 $p_k = p(x_k)$ $= P(X = x_k)$
$\vdots$	0
-1	0
0	$\frac{1}{10} = \frac{1}{{}^5C_3}$
1	$\frac{6}{10} = \frac{2 \cdot 3}{{}^5C_3}$
2	$\frac{3}{10} = \frac{1 \cdot 3}{{}^5C_3}$
3	0
$\vdots$	0
計	1

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & (x = 0) \\ \frac{6}{10} & (x = 1) \\ \frac{3}{10} & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$$p_k = p(x_k).$$

確率分布の性質

$$0 \leq p(x) \leq 1. \quad \sum_k p(x_k) = 1.$$

## 高校と大学の、確率の問題の違い

高校 数学 A ではこの表を作るまでを考える

高校 数学 B, 確率統計 I(\*)L\* ではこの表ができて与えられた後を考える. 'この表のとき, 赤玉の個数の母期待値は?'

## ここまで来たよ

- はじめに
  - この授業どんなのり?

- ① 離散型確率変数
  - 離散型確率変数
  - 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差
  - 事象と確率

# 関数 $g(x)$ の母期待値 $E[g(X)]$ 高校 数学 AB 岩薩林 確率・統計 §3.2(3.3)p.52

## 定義 (関数 $g(x)$ の母期待値)

離散型確率変数  $X$  が確率分布  $p(x) = \dots$  に従うとき,

$$\text{関数 } g(x) \text{ の母期待値 } E[g(X)] = \sum_x g(x) \times p(x)$$

$g$  は普通に関数. 例:  $g(x) = x^2, e^x$ , (場合分けで書かれた関数), ...

## 命題 (母期待値の性質)

$E[1] = 1$ . ( $g(x) = 1$  と  $\sum_k p(x_k) = 1$  から)

## 定義 (母平均値, 母分散, 母標準偏差)

- $X$  の母平均値  $\mu \stackrel{\text{定義}}{=} E[X]$ . ( $g(x) = x$  について). (E0) 岩薩林 確率・統計 (3.3) ( $X$  の母期待値ともいう).
- $X$  の母分散  $V[X] \stackrel{\text{定義}}{=} E[(X - \mu)^2]$ . (V0) 岩薩林 確率・統計 (3.7) ( $g(x) = (x - \mu)^2$  の母期待値)
- $X$  の母標準偏差  $\stackrel{\text{定義}}{=} \sqrt{V[X]}$  岩薩林 確率・統計 (3.7)

「母」平均値で データ分析 の「標本」平均値 岩薩林 確率・統計 §3.2(p.54) と区別

## ここまで来たよ

- はじめに
  - この授業どんなのり?

- ① 離散型確率変数
  - 離散型確率変数
  - 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差
  - 事象と確率



$\Omega = (\text{トランプのカード全体の集合}), \text{部分集合 } A = \{x \in \Omega | a(x)\} \subset \Omega.$

## 定義 (事象の確率)

「事象  $A$  の確率」 $= P(A) = P(a(X)) =$  「条件  $a(X)$  が成立する確率」

- (♥がでるといふ事象の確率)  $= P(\{\heartsuit 1, \dots, \heartsuit K\}) = P(X \text{が} \heartsuit)$
- (♥1がでるといふ事象の確率)  $= P(\{\heartsuit 1\}) = P(X \text{が} \heartsuit 1)$
- (黒札がでるといふ事象の確率)  $= P(\{\clubsuit 1, \dots, \clubsuit K, \spadesuit 1, \dots, \spadesuit K\}) = P(X \text{が黒札})$

$\Omega$  が有限集合で、等しく確からしいなら、

$$P(A) = \frac{\text{場合の数}}{\text{すべての場合の数}} = \frac{A \text{の要素の個数}}{\Omega \text{の要素の個数}} \cdot \text{高校 数学 A}$$

例  $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$  のとき、

- $P(\{0, 2\}) = P(X \text{は偶数})$
- $P(\{3, 4\}) = P(X \text{は} 3 \text{以上})$
- $P(\{2\}) = P(X = 2)$

## 事象の確率

岩薩林 確率・統計 なし

$A$ : 事象 ( $\Omega$  の部分集合)

$a(X)$ :  $X$  の条件

### 定義 (事象の確率)

$$P(A) = P(a(X)) = E[I_{[a(X)]}(X)] \quad (\text{P1})$$

ここで,

### 定義 (特徴関数)

$$\text{特徴関数 } I_{[a(X)]}(x) = \begin{cases} 1 & (a(x) \text{ が真}) \\ 0 & (a(x) \text{ が偽}) \end{cases}$$

例  $x \in \mathbb{Z}$  のとき,

$$I_{[X^2 \leq 5]}(x) = \begin{cases} 1 & (x = -2, -1, 0, 1, 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

## L01-Q1

## Quiz(離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差)

整数に値をとる離散型確率変数  $X$  は次の確率分布に従う.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{12} & (x = -1) \\ \frac{5}{12} & (x = 0) \\ \frac{3}{12} & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

- 1 母期待値  $E[e^X]$  を求めよう.
- 2  $X$  の母平均値を求めよう.
- 3  $X$  の母分散を求めよう.
- 4  $X$  の母標準偏差を求めよう.
- 5 事象  $X \leq 1$  の確率を求めよう.

来週: 練習問題 → Trial. 教科書備えて. データ分析 Google Colab 思い出しておいて.