傾いた面でのピンポン球の跳ね返り

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

プロジェクト演習 L10(2021-06-22 Tue)

最終更新: Time-stamp: "2021-06-28 Mon 07:21 JST hig"

今日の目標

- **傾いた**面への衝突前後の運動の変化を, 反発係数と**傾きの角**で記述できる

ここまで来たよ

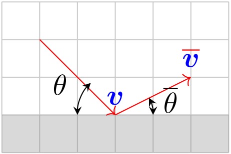
復習:水平な床で跳ね返るとき $(0 < e \leq 1)$

床 ($z = 0$,x 軸に平行) に衝突するとき，または，x 軸に平行なターンブラケットに衝突するとき，

衝突直前 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ -v\sin\theta \end{pmatrix}$，衝突直後 $\overline{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \overline{v}_x \\ \overline{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{v}\cos\overline{\theta} \\ +\overline{v}\sin\overline{\theta} \end{pmatrix}$.

衝突前後の速度

$$
\begin{aligned}
\overline{v}_x &= +1 \times v_x \\
\overline{v}_z &= -e \times v_z \\
\overline{v}\cos\overline{\theta} &= v\cos\theta \\
\overline{v}\sin\overline{\theta} &= e \times v\sin\theta
\end{aligned}
$$



反発係数 e はピンポン球と面の材質で決まる (位置や速度によらない).

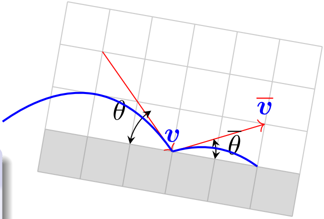
$\overline{v} = [\overline{v}_x^2 + \overline{v}_z^2]^{1/2} = [v_x^2 + e^2 \cdot v_z^2]^{1/2}$, $\tan\overline{\theta} = \frac{\overline{v}_z}{\overline{v}_x} = -\frac{ev_z}{v_x} = e\tan\theta$.

傾いた床 ($0 < e \leq 1$)

床 (または水平なブラケット) に衝突, て言ってたけど, 実は 限定する必要なかった.

- 跳ね返る面と x 軸が平行
- 跳ね返る面と z 軸が垂直
- θ は面と速度のなす角

と思えば, 傾いててもいい.
重力とは無関係 (横置き=ビリヤードでもいい)



衝突前後の速度

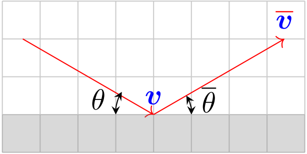
$$
\begin{aligned}
\overline{v}_x &= +1 \times v_x \\
\overline{v}_z &= -e \times v_z
\end{aligned}
$$

水平な床+完全弾性衝突による簡単化 ($e = 1$)

衝突前後の速度

$$\overline{v}_x = +1 \times v_x$$
$$\overline{v}_z = -1 \times v_z$$
$$\overline{v}\cos\overline{\theta} = v\cos\theta$$
$$\overline{v}\sin\overline{\theta} = v\sin\theta$$

反発係数 $e = 1$



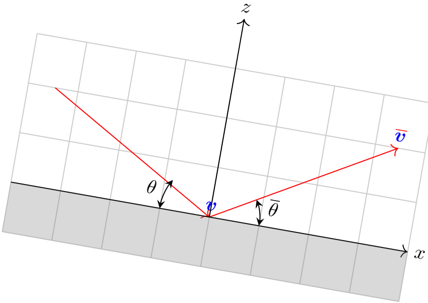
$\overline{v} = [\overline{v}_x^2 + \overline{v}_z^2]^{1/2} = [v_x^2 + e^2 \cdot v_z^2]^{1/2}$, $\tan\overline{\theta} = \frac{\overline{v}_z}{\overline{v}_x} = -\frac{ev_z}{v_x} = e\tan\theta$.

$\downarrow$ 反発係数 $e = 1$

$\overline{v} = v$, $\overline{\theta} = \theta$.

傾いた床+完全弾性衝突による単純化 ($e = 1$)

- 跳ね返る面と x 軸が平行
- 跳ね返る面と z 軸が垂直
- θ は面と速度のなす角



衝突前後の速度

$$\overline{v}_x = +1 \times v_x$$

$$\overline{v}_z = -1 \times v_z$$

$\overline{v} = [\overline{v}_x^2 + \overline{v}_z^2]^{1/2} = [v_x^2 + e^2 \cdot v_z^2]^{1/2}$, $\tan\overline{\theta} = \frac{\overline{v}_z}{\overline{v}_x} = -\frac{ev_z}{v_x} = e\tan\theta$.

↓ 反発係数 $e = 1$

$\overline{v} = v$, $\overline{\theta} = \theta$.

傾いている場合の変数名の修正 ($0 < e \leq 1$)

z 軸は重力に平行 (鉛直上向き), x 軸 は重力と垂直 (水平).
床と面のなす角 Θ (θ の大文字) 図は $\Theta > 0$ のとき. このとき面は右下がり.

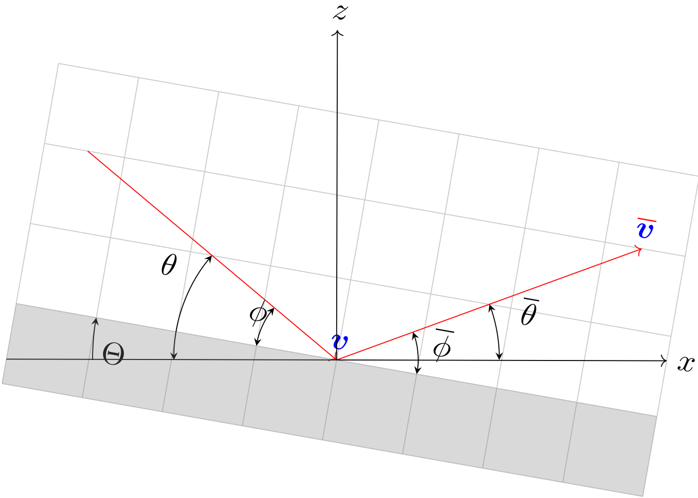


図 $e = 1$ のまま

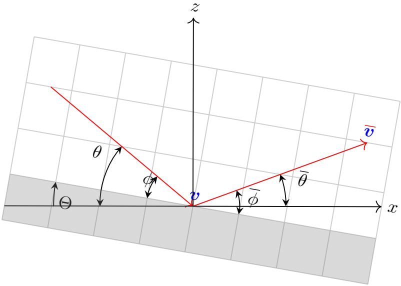
傾いた面の跳ね返りの法則 $(0 < e \leq 1)$

$e = 1$ のとき衝突前後

速度と面のなす角 $\overline{\phi} = \phi$.
(速度と水平方向のなす角 $\overline{\theta} \neq \theta$.)
速さ $\overline{v} = v$

$0 < e \leq 1$ のとき衝突前後の速度

$$\overline{v} \cos \overline{\phi} = +1 \times v \cos \phi$$
$$\overline{v} \sin \overline{\phi} = e \times v \sin \phi$$
$$\overline{v} \neq v$$



ピンポンチャレンジの順問題

Θ が与えられたときに,
$\overline{v}, \overline{\theta}$ を v, θ から 求めたい.
$\overline{v}_x, \overline{v}_z$ を v_x, v_z から 求めたい, って言っても同じこと.

$e = 1$(完全弾性衝突) の例題 I

L10-Q1

Quiz(完全弾性衝突での跳ね返り)

反発係数 $e = 1.0$ とする.
面の傾きの角 $\Theta = +10^\circ$ にターンブラケットを設定した.
ピンポン球が, $\theta = 40^\circ$, $v = 0.3$m/s で当たった.
$\overline{\theta} =?, \overline{v} =?$

$\Theta = 10^\circ$.

	$e = 1$	$e = 0.5$
θ		
ϕ		
$\overline{\phi}$		
$\overline{\theta}$		
$\overline{v}$		
$\overline{v}_x$		
$\overline{v}_z$		

$e = 1$ のときの角度の関係

$$
\begin{aligned}
\phi =& \theta - \Theta, \\
\overline{\theta} =& \overline{\phi} - \Theta \\
=& \phi - \Theta \\
=& (\theta - \Theta) - \Theta, \\
\overline{v} =& v
\end{aligned}
$$

$$\tan \overline{\phi} = 1 \times \tan \phi.$$

$0 < e \leq 1$(非弾性衝突) のときの例題 I

$e = 1 \rightsquigarrow e \neq 1$ 一般

$$\begin{array}{l} \bar{v}\cos\bar{\phi} = v\cos\phi \\ \bar{v}\sin\bar{\phi} = v\sin\phi \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \bar{v}\cos\bar{\phi} = v\cos\phi \\ \bar{v}\sin\bar{\phi} = ev\sin\phi \end{array}$$

$\bar{\phi} = \tan^{-1}(1 \times \tan\phi) \rightsquigarrow \bar{\phi} = \tan^{-1}(e \times \tan\phi)$

と修正するだけ.

L10-Q2

Quiz(非弾性衝突での跳ね返り)

反発係数 $e = 0.5$ とする.
面の傾きの角 $\Theta = +10^\circ$ にターンブラケットを設定した.
ピンポン球が, $\theta = 40^\circ$, $v = 0.30\mathrm{m/s}$ で当たった.
$\bar{\theta} = ?, \bar{v} = ?$
$\bar{v}_x, \bar{v}_z = ?$

$0 < e \leq 1$(非弾性衝突) のときの考え方

$$
\begin{aligned}
\phi =& \theta - \Theta, \\
\overline{\theta} =& \overline{\phi} - \Theta \\
=& \tan^{-1}(e \times \tan\phi) - \Theta \\
\overline{v} =& [\overline{v}_x^2 + \overline{v}_z^2]^{1/2} \\
=& [(\overline{v}\cos\overline{\phi})^2 + (\overline{v}\sin\overline{\phi})^2]^{1/2} \\
=& [(v\cos\phi)^2 + (ev\sin\phi)^2]^{1/2}
\end{aligned}
$$

$0 < e \leq 1$(非弾性衝突) のとき衝突後の速度の計算方法

$\overline{v}_x, \overline{v}_z$ を直に v_x, v_z で表す

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \overline{v}_x \\ \overline{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\phi\cos\Theta + ev\sin\phi\sin\Theta \\ ev\sin\phi\cos\Theta - v\cos\phi\sin\Theta \end{pmatrix}$$

$v = [v_x^2 + v_z^2]^{1/2}$, $\phi = \theta - \Theta = \tan^{-1}\frac{-v_z}{v_x} - \Theta$

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \overline{v}_x \\ \overline{v}_z \end{pmatrix} &= \overline{v}\begin{pmatrix} \cos\overline{\theta} \\ \sin\overline{\theta} \end{pmatrix} \\
&= \overline{v}\begin{pmatrix} \cos(\overline{\phi} - \Theta) \\ \sin(\overline{\phi} - \Theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \overline{v}\cos\overline{\phi}\cos\Theta + \overline{v}\sin\overline{\phi}\sin\Theta \\ \overline{v}\sin\overline{\phi}\cos\Theta - \overline{v}\cos\overline{\phi}\sin\Theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v\cos\phi\cos\Theta + ev\sin\phi\sin\Theta \\ ev\sin\phi\cos\Theta - v\cos\phi\sin\Theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

検算 1: $\Theta = 0$ のとき?　　検算 2: $e = 1$ のとき?

ここまで来たよ

ピンポンチャレンジを数学的に言うと?

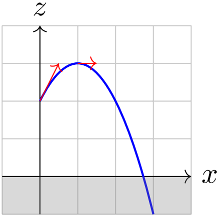
どうせピンポン球は鉛直面内を運動するから，平面で考えられる．
水平に x 軸，鉛直 (重力に平行) に z 軸．

位置 $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$\downarrow$ 微分 $\uparrow$ 積分

速度 $\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix}$ 微積分

速さ $v(t) = |\boldsymbol{v}(t)|$=速度ベクトルの $\boldsymbol{v}(t)$ の絶対値 (長さ) 線形代数



アニメーション
https://www.geogebra.org/m/axszjbeg
黒字 x スカラー，青太字 $\boldsymbol{r}$ 2 次元ベクトル．

例題 I

L10-Q3
TA Prob and Sol:放物運動

ピンポン球を床の上 hm の位置から, 速さ v_0 m/s で, (上向きを正として測った) 角 θ_0 の向きに発射した.
床に落ちた瞬間の, ピンポン球の位置, 速度, 速さ, 速度と床のなす角 (>0) は?

略解
発射時刻を $t=0$ とする

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ -\frac{1}{2}gt^2+ct+d \end{pmatrix}.$$

例題 II

初期条件 $x(0)=0, z(0)=h, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=v_0\cos\theta_0, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0)=v_0\sin\theta_0$ より,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\theta_0 \cdot t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot \sin\theta_0 \cdot t + h \end{pmatrix}.$$

床に到達した時刻を $t=t_1$ とすると, 2 次方程式 $z(t_1)=0$ を解いて,

$$t_1 = \frac{v_0\sin\theta_0}{g} + \left[\left(\frac{v_0\sin\theta_0}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}\right]^{1/2}.$$

落ちた瞬間の量は, $\boldsymbol{r}(t_1), \boldsymbol{v}(t_1) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t_1)$ を計算して求められる.

ここまで来たよ

精度と有効数字

- 足したり引いたりしたとき, 有効数字の小数点以下の桁数は, 少ない方にあわされる
  $1.2 + 2.434 = 3.6$ 数値計算法
- 掛けたり割ったりしたとき, 有効数字の桁数 (仮数部) は, 少ない方にあわされる 数値計算法
  $3 \times 3.14156 = 9$

カップに到達したときの, 前後左右のずれは何 mm 許される?

測定の難しい量, 易しい量

最後に出したい量

$z=$ カップの縁の高さ, となるときの x 座標. 誤差はカップの半径くらいまで. $\to$ 有効数字何桁?

正確に測れる量

座標 x, z: メジャー+動画撮影
初速度の角 θ: ゴニオメータ
~~時間 t: ストップウォッチ+動画撮影~~

測定の難しい量

速度の大きさ v: 簡単に測れるなら $\sqrt{\bar{h}/h}$ とか使わない
跳ね返りの直前直後の角 θ, ϕ: 動画撮影?
時間 t: ストップウォッチ+動画撮影

ここまで来たよ

L10-Q1

Quiz 解答:完全弾性衝突での跳ね返り

$\phi = 40 - 10 = 30°$.
$e = 1.0$ なので, $\overline{\phi} = \tan^{-1}(e \times \tan\phi) = \phi = 30°$.
$\overline{\theta} = 30 - 10 = 20°$.
$e = 1.0$ なので, $\overline{v} = v = 0.3$ m/s.

L10-Q2

Quiz 解答:非弾性衝突での跳ね返り

$\phi = 40 - 10 = 30^\circ$.

'考え方' に沿った手順

$\overline{\phi} = \tan^{-1}(e \times \tan\phi) = 16.1^\circ$.

$\overline{\theta} = 16.1 - 10 = 6^\circ$.

$\overline{v} = [(\overline{v}\cos\overline{\phi})^2 + (\overline{v}\sin\overline{\phi})^2]^{1/2} = [(v\cos\phi)^2 + (ev\sin\phi)^2]^{1/2} = 0.27$ m/s.

$\overline{v}_x = \overline{v}\cos\overline{\theta} = 0.269$m/s.

$\overline{v}_z = \overline{v}\sin\overline{\theta} = 0.029$m/s.

'計算方法' に沿った手順

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \overline{v}_x \\ \overline{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\phi\cos\Theta + ev\sin\phi\sin\Theta \\ ev\sin\phi\cos\Theta - v\cos\phi\sin\Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.269 \\ 0.029 \end{pmatrix}$$

$\overline{v} = |\overline{\boldsymbol{v}}| = 0.27$m/s.

$\overline{\theta} = \tan^{-1}\frac{\overline{v}_z}{\overline{v}_x} = 6^\circ$.