L01 確率変数の和

樋口さぶろお

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

理論物理学特論 L01(2021-09-21 Tue)

最終更新: Time-stamp: "2021-09-21 Tue 15:06 JST hig"

今日の目標

- 科目の目標と評価方法を説明できる
- Teams, Moodle, Google Colab が使える
- 2 つの確率変数の和の確率関数, 確率密度関数を求められる

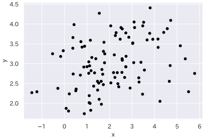
ここまで来たよ

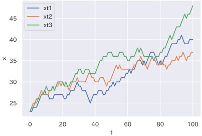
1. はじめに
   - この授業どんなのり/取る価値ある?
2. 確率変数の和

科目の目標

もう少し正確にはシラバスを見てね.

- 多変量解析 = 確率統計☆演習 I,II の, 2 次元分布の続きのようなもの. データからモデルの量を推定する (推測統計)



- 時系列解析 = 計算科学☆実習 B の, 確率過程 (時間による確率変数) のようなもの. データからモデルの量を推定する (推測統計)
  - 2020 年の流行語大賞 (うそです)「移動平均」
  - 

学部の新カリキュラムでは, 多変量解析及び演習 (2 年後期週 2 コマ 3 単位) が新設. ここにはその TA も···

教科書 永田棟方 多変量解析法入門 急ぎません.

2012 にも同じ教科書を使ってました

https://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/theorphys_2012

成績

- 平常点 100/15
  1. 授業内に紙やファイルや写真を提出 https://hig3.moodle.net
  2. 次回の前日までに Web で提出

おわび

次の回は通常と異なる実施方法, または休講/補講になる可能性.

2021-10-05, 12, 26

2 次元離散型

X, Y を赤白 2 個のサイコロを振ったときに出る目とする (この場合, たまたま X, Y は独立同分布にしたがう).
同時分布の確率関数は

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{36} & (x = 1, 2, \cdots, 6, y = 1, 2, \cdots, 6) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$

$f(x,y)$ の表で書いた方が早い.

$x\backslash y$	1	2	$\cdots$	6
1	1/36	1/36	$\cdots$	1/36
2	1/36	1/36	$\cdots$	1/36
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
6	1/36	1/36	$\cdots$	1/36

和の分布は?

$x\backslash y$	1	2	$\cdots$	6
1	1/36	1/36	$\cdots$	1/36
2	1/36	1/36	$\cdots$	1/36
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
6	1/36	1/36	$\cdots$	1/36

$S = X + Y$ の確率関数

$$
\begin{aligned}
p_{\mathrm{S}}(s) =& P(X+Y=s) = \mathrm{E}[\mathbf{I}_{[X+Y=s]}(X,Y)] \\
=& \sum_{x=1}^{6}\sum_{y=1}^{6} \mathbf{I}_{[x+y=s]}(x,y)p(x,y) = \sum_{x=1}^{s-1} p(x, s-x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & (s=2) \\ \frac{2}{36} & (s=3) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{7}{36} & (s=7) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{36} & (s=12) \end{cases}.
\end{aligned}
$$

特徴関数 $\mathrm{I}_{[\text{ナントカ}]}(x)$ は, ナントカが成立するとき 1, しないとき 0.

L01-Q1

Quiz(2 つの離散型確率変数の和の分布)

2 つの離散型確率変数 X, Y の同時分布 $p(x, y)$ が次の表で与えられる (問: 独立か?同分布か?).

$x \backslash y$	1	2	3
4	4/32	8/32	16/32
5	3/32	0	1/32

確率変数 $S = X + Y$ の確率分布 (確率関数)$p(s)$ を求めよう.

2 次元連続型

永田棟方 多変量解析法入門 2.2(4)

X, Y を赤白 2 個の**連続**サイコロを振ったときに出る目 $(1 \le x < 7)$ とする (この場合, たまたま X, Y は独立同分布にしたがう).
同時分布の確率密度関数は

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{36} & (1 \le x < 7, 1 \le y < 7) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$

グラフで描いた方が早い.
周辺分布 X の周辺分布の確率密度関数 $f_{\mathrm{X}}(x)$ は?
確率 $P(c \le x < d) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_{[c \le x < d]}(x) f_{\mathrm{X}}(x)\, \mathrm{d}x$ となるべき.
左辺の定義 $\iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_{[c \le x < d]}(x,y) f(x,y)\, \mathrm{d}y \mathrm{d}x$
ってことは

周辺分布 (連続)

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, \mathrm{d}y.$$

L01-Q2

Quiz(2 次元の連続型確率分布の周辺分布)

連続型確率変数 X, Y の同時確率密度関数 $f(x, y)$ がで与えられる.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (0 \leq x < 3, 0 \leq y < 2 - \frac{2}{3}x) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

X, Y の周辺分布を求めよう.

和の分布

$S=X+Y$ の確率密度関数 $f_{\mathrm{S}}(s)$ は?
確率 $P(c \le S < d) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_{[c\le s<d]}(x) f_{\mathrm{S}}(s)\,\mathrm{d}s$ となるべき.

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &\overset{\text{定義}}{=} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_{[c\le x+y<d]}(x,y) f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_{[c\le s<d]}(s) f(t,s-t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t \quad \text{変換 } s=x+y,\ t=x.\ |J|=1
\end{aligned}$$

よって, $f_{\mathrm{S}}(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s-t)\mathrm{d}t$.
(世の中では, $c=-\infty$ とおいて累積分布関数 $F(d)=P(S<d)$ で話すことが多い)

和の確率密度関数

連続型 X,Y の確率密度関数:$f(x,y)$. 和 $S=X+Y$ の確率密度関数は,

$$f_{\mathrm{S}}(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,s-x)\mathrm{d}x.$$

L01-Q3

Quiz(2 つの連続型確率変数の和の分布)

連続型確率変数 X, Y は独立同分布 $\mathrm{U}(1, 7)$ にしたがう.
和 $S = X + Y$ の確率密度関数を求めよう.

L01-Q4

Quiz(2 つの連続型確率変数の和の分布)

連続型確率変数 X, Y は独立, $X \sim \mathrm{U}(1,7), Y \sim \mathrm{U}(2,4)$ とする.
和 $S = X + Y$ の確率密度関数を求めよう.

母期待値が, X, Y で計算したときと, S で計算したときで一致するか, 検算しよう.