L14 自己回帰移動平均モデル ARMA(m,l)

樋口さぶろお

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

理論物理学特論 L14(2022-01-15 Sat)

最終更新: Time-stamp: "2022-01-15 Sat 11:40 JST hig"

今日の目標

- $\mathrm{MA}(\ell)$, $\mathrm{ARMA}(m,\ell)$ を説明できる
- $\mathrm{MA}(\ell)$, $\mathrm{ARMA}(m,\ell)$ をシミュレートできる
- $\mathrm{MA}(\ell)$, $\mathrm{ARMA}(m,\ell)$ の推定と予測ができる

L13-Q1
Quiz 解答:自己回帰モデル AR(2) の例

1. モデルの定義より $X_2 = \phi_1 X_1 + \phi_2 X_0 + \epsilon_2 = \epsilon_2$.
2. モデルの定義より
   $X_3 = \phi_1 X_2 + \phi_2 X_1 + \epsilon_3 \phi_1 (\phi_1 X_1 + \phi_2 X_0 + \epsilon_2) + \phi_2 X_1 + \epsilon_3 = \phi_1 \epsilon_2 + \epsilon_3$.
   $\mathrm{E}[(\phi_1 \epsilon_2 + \epsilon_3)^2] = \phi_1^2 \sigma^2 + 2 \cdot \phi_1 \cdot 0 + \sigma^2$.
3. モデルの定義より
   $X_4 = \phi_1 X_3 + \phi_2 X_2 + \epsilon_4 = \phi_1^2 \epsilon_2 + \phi_1 \epsilon_3 + \phi_2 \epsilon_2 + \epsilon_4$.
   $\mathrm{E}[X_3] = \mathrm{E}[X_4] = 0$ より,
   $\mathrm{Cov}[X_3, X_4] = \mathrm{E}[X_3 X_4] = (\phi_1^3 + \phi_1 \phi_2 + \phi_1 \phi_2)\sigma^2$.

ここまで来たよ

13 自己回帰モデル AR(m)

14 自己回帰移動平均モデル ARMA(m,l)
- m 次の自己回帰モデル AR(m)
- ℓ 次の移動平均モデル MA(ℓ)
- ARMA(m, ℓ)
- ARIMA(m, d, ℓ)
- さらなるバリエーション

m 次の自己回帰モデル AR(m)

定義は Web 版参照.

https://www.data.math.ryukoku.ac.jp/course/mva_2021/w14

m 個前までの時刻の X_t が影響する.

周期的な変動を作れる. 自己相関係数 $r(s)$ が s について振動することがある.

L14-Q1

Quiz(自己回帰モデル AR(2) の例)

2 次の自己回帰モデル AR(2) モデルを考える.(授業中に使った記号で).
初期条件として, X_0, X_1 は定数 0 に等しいとしてよい
$(P(X_0 = 0) = P(X_1 = 0) = 1)$.

1. X_2 を, ϵ_t と ϕ_k で表そう.
2. $\mathrm{E}[X_3^2]$ を σ と ϕ_k で表そう.
3. 共分散 $\mathrm{Cov}[X_3, X_4]$ を σ と ϕ_k で表そう.

特性方程式と定常性

非定常の典型として, $|X_t| \to +\infty$ となるケースがある. いつそうなるか考えよう.
$\epsilon_t = \mathrm{E}[\epsilon_t] = 0$, $X_t \sim ar^{-t}$ となる振る舞いを想定し (決定論的な漸化式として) 代入.

$$
\begin{aligned}
X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_m X_{t-m} &= 0 \\
ar^{-t} - \phi_1 ar^{-t+1} - \cdots - \phi_m ar^{-t+m} &= 0 \\
\text{特性方程式}\ 1 - \phi_1 r^1 - \cdots - \phi_m r^m &= 0
\end{aligned}
$$

特性方程式の根がすべて $|r| > 1$ であるとき, $X_t \to 0$ と想定される. このとき $\mathrm{AR}(m)$ は定常過程になることが知られている.
$m = 1$ のとき, 定常過程 $\Leftrightarrow |\phi_1| < 1$.
$|r| = 1$ の根があるとき, 単位根過程 という, 非定常過程の中でも性質のよい過程になる.

AR(m) モデルの推定

推定したいもの: m, $\phi_1, \ldots, \phi_m$, ホワイトノイズの σ^2.
基準: 標準誤差が最小, 最大尤度, AIC 最小など.

AR(m) モデルの予測 prediction

与えた x の期間外の t に対して X_t を推定すること.
(x が学習データだとすれば, テストデータに対して出力を得ること)
方法は 1 通りではない.
直前の X_t を初項 (群), 推定された ϕ_m を使用, $\epsilon_t = \mathrm{E}[\epsilon_t] = 0$ として扱って漸化式で計算. ($\epsilon_t = 0$ でも, ϕ_m だけから周期的な変動が起きる).

AR(m) モデルの推定と予測の実際

```
from statsmodels.tsa import ar_model
model = ar_model.AR(x)  # xは時系列を収めた Series
result = model.fit(maxlag=12, ic='aic') # 推定
# mが最大12までの範囲で よく予測するmと係数を探せ. 基準はAIC

result.k_ar         # mのこと
result.params       # 定数項, phi1, ...
result.sigma2
```

```
result.predict(start=t0,end=t1) # 指定区間内の予測
result.fittedvalues             # 指定区間=与えたxの区間
```

x が Datetimeindex を持つとき, これらも Datetimeindex を持つので重ねて plot するのは容易.
x が単なる np.array のとき, fittedvalues は, 最初のほうを除いた異なる長さの np.array になることがある.

ここまで来たよ

13 自己回帰モデル AR(m)

14 自己回帰移動平均モデル ARMA(m,l)

- m 次の自己回帰モデル AR(m)
- ℓ 次の移動平均モデル MA(ℓ)
- ARMA(m, ℓ)
- ARIMA(m, d, ℓ)
- さらなるバリエーション

ℓ 次の移動平均モデル MA(ℓ)

MA(ℓ)

θ_k: 定数

$$X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_\ell \epsilon_{t-\ell}.$$

ϵ_t はホワイトノイズ.
$\mathrm{Cov}[X_t, \epsilon_s] = 0 \quad (s > t)$

https://www.data.math.ryukoku.ac.jp/course/mva_2021/w14

性質

- $\mathrm{MA}(\ell)$ は常に定常過程.
- 実は時間間隔 $s > \ell$ に対して自己相関係数 $|r(s)| = 0$.
- 実は, $\mathrm{MA}(1)$ では自己相関係数 $|r(s)| \leq \frac{1}{2}$.

定常な $\mathrm{AR}(m)$ は $\mathrm{MA}(+\infty)$ の特別なケースと見なせる. $\mathrm{MA}(\ell)$ は$\cdots$

L14-Q2

Quiz(移動平均モデル MA(1) の例)

1 次の移動平均モデル MA(1) モデルを考える (授業中に使った記号を用いる)

1. X_2 を, ϵ_t, θ_1 で表そう.
2. $\mathrm{E}[X_2^2]$ を σ と θ_1 で表そう.
3. $\mathrm{Cov}[X_2, X_3]$ を σ と θ_1 で表そう.
4. $\mathrm{Cov}[X_2, X_4]$ を求めよう.

MA(ℓ) の推定と予測

推定は同じのり．より一般な ARIMA で．
$\epsilon_t = \mathrm{E}[\epsilon_t] = 0$ として扱うと, 既知区間の ℓ 項先以降は 0 になってしまう．

ここまで来たよ

13 自己回帰モデル AR(m)

14 自己回帰移動平均モデル ARMA(m,l)

- m 次の自己回帰モデル AR(m)
- ℓ 次の移動平均モデル MA(ℓ)
- ARMA(m, ℓ)
- ARIMA(m, d, ℓ)
- さらなるバリエーション

ARMA(m,ℓ)

X_t が $\mathrm{AR}(m), \mathrm{MA}(\ell)$ の右辺の和で決まる.

ARMA(m,ℓ)

ϕ_t, θ_t: 定数

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_m X_{t-m} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_\ell \epsilon_{t-\ell}.$$

ϵ_t はホワイトノイズ.
$\mathrm{Cov}[X_t, \epsilon_s] = 0 \quad (s > t)$

- $\mathrm{ARMA}(m,\ell)$ が定常過程であるかどうかは, AR 部分の特性根による.

L14-Q3

Quiz(自己回帰移動平均モデル ARMA(2,1) の例)

自己回帰モデル ARMA(2,1) モデルを考える (授業中に使った記号で). 初期条件として, X_0 は定数 0 に等しい ($P(X_0 = 0) = 1$), $X_1 = \epsilon_1$ とする.

1. X_2 を, $\epsilon_t, \phi_i, \theta_j$ で表そう.
2. $\mathrm{E}[X_2^2]$ を σ, ϕ_i, θ_j で表そう.
3. 共分散 $\mathrm{Cov}[X_2, X_3]$ を σ, ϕ_1, θ_j で表そう.

ここまで来たよ

13 自己回帰モデル AR(m)

14 自己回帰移動平均モデル ARMA(m,l)

- m 次の自己回帰モデル AR(m)
- ℓ 次の移動平均モデル MA(ℓ)
- ARMA(m, ℓ)
- ARIMA(m, d, ℓ)
- さらなるバリエーション

ARIMA(m, d, ℓ)

I for ‘integrated’, 自己回帰和分移動平均モデル (和分は差分の逆)

ARIMA

X_t が $\mathrm{ARIMA}(m, d, \ell)$ 過程にしたがうとは, X_t の d 次の階差が $\mathrm{ARMA}(m, \ell)$ 過程にしたがうこと.

階差を取ると, 定数項が消える, (単調な) トレンドが消える.
ARIMA は, 元の時系列に, 定数項, (単調な) トレンドがあることを許容する.

ARIMA(m, d, ℓ) の推定と予測の実際

```python
from statsmodels.tsa import stattools
stattools.arma_order_select_ic(x) # いい次数を発見

from statsmodels.tsa import arima_model
model = arima_model.ARMA(x,order=(p,l))
# model = arima_model.ARIMA(x,order=(p,d,l))
result = model.fit()

result.k_ar          # m
result.params        # 定数項, phi1, ...
result.sigma2
result.predict(start=t0,end=t1) # 指定区間内の予測
result.fittedvalues             # 指定区間=与えたxの区間
```

ここまで来たよ

13 自己回帰モデル AR(m)

14 自己回帰移動平均モデル ARMA(m,l)

- m 次の自己回帰モデル AR(m)
- ℓ 次の移動平均モデル MA(ℓ)
- ARMA(m, ℓ)
- ARIMA(m, d, ℓ)
- さらなるバリエーション

さらなるバリエーション

- SARMA, SARIMA. S for ‘seasonal’ $\Delta t = 1$ とは別の, 大きな周期の季節変動を, $\phi_s X_{t-s}$ のような項としていれておく
- VAR, MAR. V for vector, M for multivariate X をベクトル ϕ を行列にする