微積分♪演習冬のプチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2006-11-29 Wed 更新: 2006-12-10 22:34JST

冬のプチテスト参加案内

1. **4問60分です．片面です**
2. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
3. 過程も答えよう．最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう．必要なら, 関数 e^x, 関数 $\frac{1}{1-x}$ の $x=0$ におけるテイラー級数は, 導かないで使ってもいいです.

1

複素数 $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=\mathrm{e}^{2-\frac{1}{4}\pi i}$ を考える.

1. z_1 の絶対値, 偏角を求めよう.
2. z_2 の実部, 虚部を求めよう.
3. 積 z_1z_2 の絶対値, 偏角を求めよう.
4. $(z_1)^{123}$ の実部, 虚部を求めよう.

2

1. $f(x)=\sinh x$ の 3 次のマクローリン展開を求めよう．剰余項はランダウ記号を用いて表そう.
2. $f(x)=\frac{1}{1+2x}$ のマクローリン級数を求めよう.
3. $f(x)=\mathrm{e}^{1+x^2}$ の $x=1$ における 2 次のテイラー展開を求めよう．剰余項はランダウ記号を用いて表そう.

3

1. $f(x)=\mathrm{e}^x$ を考える．$f(x)$ の, $x=0$ における 2 次のテイラー展開を利用して, $\mathrm{e}^{-0.1}$ の近似値を求めよう.
2. 関数 $f(x)=\ln(x)$ を考える．$f(x)$ の, $x=1$ における 2 次のテイラー展開を利用して, $\ln(1.2)$ の近似値を求めよう．ただし, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x=\frac{1}{x}$ であることを使ってよい.

4

2 変数関数 $f(x,y)=x\,\mathrm{e}^{-2y}+\cos(2xy^2)$, $g(x,y)=x^2y+y^2$ を考える.

1. 偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$,$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を求めよう.
2. 偏微分 $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$,$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ を求めよう.
3. $z=g(x,y)$ の, $(x,y)=(-2,1)$ における接平面の方程式を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

微積分♪演習冬のプチテスト略解

樋口さぶろお[2]

1

1. $z_1 = 2e^{\frac{1}{6}\pi i}$. よって, $|z_1| = 2$, $\operatorname{Arg} z_1 = \frac{1}{6}\pi$.
2. $z_2 = e^2 e^{-\frac{1}{4}\pi i} = e^2(\cos(-\frac{1}{4}\pi) + i\sin(-\frac{1}{4}\pi))$. よって, $\operatorname{Re} z_2 = \frac{e^2}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{Im} z_2 = -\frac{e^2}{\sqrt{2}}$.
3. $z_1 z_2 = 2e^{\frac{1}{6}\pi i} e^2 e^{-\frac{1}{4}\pi i} = 2e^2 e^{-\frac{1}{12}\pi}$. よって, $|z_1 z_2| = 2e^2$. $0 \le \operatorname{Arg}(z_1 z_2) < 2\pi$ なので, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = -\frac{1}{12}\pi + 2\pi = \frac{23}{12}\pi$.
4. $e^{2\pi i} = 1$ に注意して, $(z_1)^{123} = 2^{123} \times e^{\frac{123}{6}\pi i} = 2^{123}(e^{2\pi i})^{60} e^{\frac{3}{6}\pi i} = 2^{123} \cdot 1^{60} \cdot i = 2^{123} i$.

2

1. $f^{(0)}(x) = \sinh x$, $f^{(1)}(x) = \cosh x$, $f^{(2)}(x) = \sinh x$, $f^{(3)}(x) = \cosh x$, $\cdots$.
   $f^{(0)}(1) = 0$, $f^{(1)}(1) = 1$, $f^{(2)}(1) = 0$, $f^{(1)}(1) = 1$, $\cdots$. よって,
   $$f(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^5).$$
2. 等比級数の公式を用いて,
   $$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k x^k.$$
   推測でも求まる.
3. $f^{(0)}(x) = e^{1+x^2}$, $f^{(1)}(x) = 2xe^{1+x^2}$, $f^{(2)}(x) = (2+4x^2)e^{1+x^2}$.
   $f^{(0)}(1) = e^2$, $f^{(1)}(1) = 2e^2$, $f^{(2)}(1) = 6e^2$.
   よって,
   $$f(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + 3e^2(x-1)^2 + O((x-1)^3).$$

3

1. $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$ より, $f(-0.1)$ の近似値は $1 - 0.1 + \frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.905$. なお, 真の値は $e^{-0.1} = 0.90483\cdots$.
2. $f^{(0)}(x) = \ln x, f^{(1)}(x) = \frac{1}{x}, f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2}$. よって, $f^{(0)}(1) = 0, f^{(1)}(1) = 1, f^{(2)}(x) = -1$ よって, 2 次のテイラー展開は
   $$f(x) = \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + O((x-1)^3) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + O((x-1)^3) \quad (4.1)$$
   よって, $f(1.2)$ の近似値は $0.2 - \frac{1}{2} \cdot 0.2^2 = 0.18$. なお, 真の値は $\ln(1.2) = 0.18232\cdots$.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^{-2y} - 2y^2\sin(2xy^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x\,\mathrm{e}^{-2y} - 4xy\sin(2xy^2)$.
2. $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xy$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2y$.
3. $g(-2,1) = 5$, $\frac{\partial g}{\partial x}(-2,1) = -4$, $\frac{\partial g}{\partial y}(-2,1) = 6$ より $z - 5 = -4(x+2) + 6(y-1)$ すなわち $z = -4x + 6y - 9$.

秋のプチテストのスコアは e-learning サイト `https://f5lms.media.ryukoku.ac.jp` でお知らせします. スコアが入力された際には, メールアドレス`@mail.ryukoku-u` に通知されます.

`http://hig3.net`