微積分♪演習ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-01-31 Wed 更新: 2007-02-21 12:44JST

ファイナルトライアル参加案内

1. **外部記憶ペーパー作成 10 分＋答案作成 80 分です.**
2. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
3. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう. 必要なら, 関数 e^x, 関数 $\frac{1}{1-x}$ の $x=0$ におけるテイラー級数は, 導かないで使ってもいいです.

1

次の定積分を求めよう.

1. $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{e}^{3ix}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^2 x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (*Hint.* $t=x^2$ とおいて置換積分してもよい)
3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ (*Hint.* $x=2\sin t$ とおいて置換積分してもよい)
4. $\displaystyle\int_0^3 x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ (*Hint.* 部分積分してもよい)

2

1. 関数 $f(x,y)=x^4+\dfrac{1}{16}y^4+2xy$ に対して, $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を求めよう.
2. 関数 $f(x,y)=x^4+\dfrac{1}{16}y^4+2xy$ の停留点をすべて求めよう.
3. 関数 $g(x,y)=\mathrm{e}^{2x+3y+1}$ の $(x,y)=(-2,1)$ における 2 次のテイラー展開を求めよう.

うらにつづく

hig@math.ryukoku.ac.jp http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

1. 2 重積分

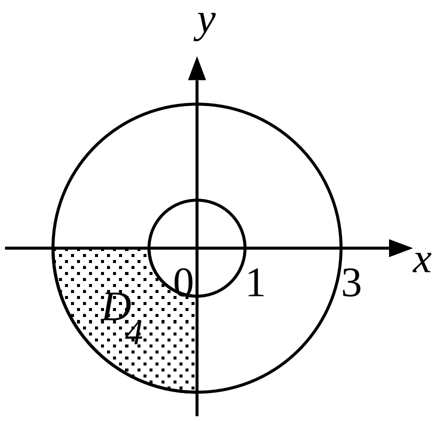
$$I_3 = \iint_{D_3} (x^2 + y^2)\ \mathrm{d}S$$

を極座標 (r, θ) を用いて求めよう．ただし，$D_3 = \{(x, y) | 0 \le x^2 + y^2 \le 9\}$.

2. 2 重積分

$$I_4 = \iint_{D_4} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}\ \mathrm{d}S$$

を極座標 (r, θ) を用いて求めよう．ただし，D_4 は図の領域.



4

1. 2 重積分

$$I_1 = \iint_{D_1} (x^3 + 3x^2y^3)\ \mathrm{d}S$$

を求めよう．ただし，$D_1 = \{(x, y) | 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 3\}$.

2. 2 重積分

$$I_2 = \iint_{D_2} x^3y\ \mathrm{d}S$$

を求めよう．ただし，D_2 は $(0, 0), (3, 0), (3, -2)$ を 3 頂点とする三角形の内部.

5

1. 関数 $f(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$ の $x = 2$ におけるテイラー級数を求めよう.
2. 関数 $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ のマクローリン級数を求めよう.
3. 関数 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ の 2 次のマクローリン展開を求めよう.

$\boxed{\text{おしまい}}$

微積分♪演習ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2]

1

1. オイラーの公式を用いて $\left[\frac{1}{3i}\mathrm{e}^{3ix}\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{2}{3}$.
2. 置換積分により $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})$.
3. 置換積分により $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\cos t}{2\cos t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\pi$.
4. 部分積分により $\left[\frac{1}{-2}x\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 - \displaystyle\int_0^3 \frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(1-7\mathrm{e}^{-6})$.

2

1. $f_x(x,y) = 4x^3+2y$, $f_{xx}(x,y) = 12x^2$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2$, $f_y(x,y) = \frac{1}{4}y^3+2x$, $f_{yy}(x,y) = \frac{3}{4}y^2$.
2. $(x,y) = (0,0), (\pm 1, \mp 2)$ (複号同順)
3. $g(x,y) = 1+2(x+2)+3(y-1)+\frac{1}{2!}(4(x+2)^2+2\cdot 6(x+2)(y-1)+9(y-1)^2)+R_3$.

3

1. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ に注意して,
$$I_3 = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3 \mathrm{d}r\ r^2\cdot r = 2\pi\times\frac{81}{4} = \frac{81}{2}\pi.$$
2. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ に注意して,
$$I_4 = \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^3 \mathrm{d}r\ \frac{r\cos\theta}{r^4}\cdot r = \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\times\int_1^3 r^{-2}\,\mathrm{d}r = (-1)\times\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

4

1. $$\int_1^3\left(\int_0^2 (x^3+3x^2y^3)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_1^3 (4+8y^3)\mathrm{d}y = 168.$$
2. $$\int_0^3\left(\int_{-\frac{2}{3}x}^0 x^3y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^3 -\frac{2}{9}x^5\mathrm{d}x = -27.$$

---

hig@math.ryukoku.ac.jp http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

5

1. $f^{(k)}(x) = 3^k \mathrm{e}^{3x+2}$ より,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^8 \cdot 3^k}{k!}(x-2)^k.$$

また, $\mathrm{e}^{3(x-2)+8} = \mathrm{e}^8 \mathrm{e}^{3(x-2)} = \mathrm{e}^8 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(3(x-2))^k$ と考えてもよい.

2. $f^{(k)}(x) = k!(-2)^k(2x+3)^{-(k+1)}$ より,

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-\tfrac{2}{3})^k x^k$$

また, $\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}x\right)} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{2}{3}x)^k$ と考えてもよい.

3.

$$f(x) = 1 + x - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^3).$$

秋のプチテストのスコアは e-learning サイト `https://f5lms.media.ryukoku.ac.jp` でお知らせします. スコアが入力された際には, メールアドレス`@mail.ryukoku-u` に通知されます.

`http://hig3.net`