微積分♪演習 (略解) (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2006-11-30 Thu 更新: Time-stamp: "2006-12-14 Thu 07:56 JST hig"

9 2 変数関数のテイラー展開

例題 (講義でやります)

略解 講義でやりました.

9.1 お奨め問題:テイラー展開

略解

1. $f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2$, $f_y(x,y) = x^2 + 4xy + 9y^2$, $f_{xx}(x,y) = 6x + 2y$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x + 4y$, $f_{yy}(x,y) = 4x + 18y$, $f_x(1,-1) = 3$, $f_y(1,-1) = 6$, $f_{xx}(1,-1) = 4$, $f_{xy}(1,-1) = f_{yx}(1,-1) = -2$, $f_{yy}(1,-1) = -14$.
2. $f(x,y) = 0 + 3(x-1) + 6(y+1) + \frac{1}{2!}(4(x-1)^2 + 2(-2)(x-1)(y+1) - 14(y+1)^2) + R_3$.
3. $f_x(\xi(\pi),\eta(\pi)) = f_x(1,-1) = 3$, $f_y(\xi(\pi),\eta(\pi)) = f_y(1,-1) = 6$. $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}(\pi) = -2$, $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}(\pi) = +3$. よって, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = 3\cdot(-2) + 6\cdot 3 = 12$.
4. $D_{\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} f(1,-1) = -\frac{1}{2}(3 + 6\sqrt{3}) < 0$. よって降り.

9.2 2 変数関数のテイラー展開

略解

1. $f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x+y)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} x^j y^{k-j} = 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + R_3$.
   または, $f(x,y) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j\right) \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^k\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} x^j y^k$.
2. $f_x(x,y) = f_y(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 1$ より, $z = 1 + x + y$.
3. $f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x + \frac{\pi}{2})^2 - \frac{\pi}{2}(x + \frac{\pi}{2})(y+1) - \frac{\pi^2}{8}(y+1)^2 + R_3$.
4. $f_x(x,y) = y\cos(xy), f_y(x,y) = x\cos(xy)$. $f_x(-\frac{\pi}{2},-1) = f_y(-\frac{\pi}{2},-1) = 0$ より, $z = 1$.
5. $f(x,y) = \ln(1 + (x+y)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x+y)^k = (x+y) - \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + R_3$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), tel: 0775437514 数理情報学科へや:1 号館 5 階 502.

9.3　2 変数関数の極大極小

略解

1. $f_x = f_y = (0,0)$ となるのは, $(x,y) = (0,0), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. 実は $(0,0)$ は極大でも極小でもなく, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ は極小.

2. 直線 $y = x$ 上のすべての点.