計算科学 II プチテスト

樋口さぶろお[1]　配布: 2004 年 11 月 09 日更新: Time-stamp: "2004/11/07 Sun 18:11 hig"

注意　全部で 4 問です．90 分間．解答用紙の 1 面に 1 問ずつ, 指定された用紙に解答しよう．

1. 参照なしです．
2. 過程も答えよう．最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう．
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう．
4. 実習で返却できなかった答案の扱いについて, 希望する方を答案用紙の欄にマークしよう．
   (a) 1-508 前引き出しで答案を返却する (第三者が点数を見る可能性がある).
   (b) 答案を廃棄し, 返却も公開もしない．

1

連続な値をとる確率変数 X が, 確率密度関数

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{8}x & (-2 \leqq x < +2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{1}$$

に従うとする．これに従う乱数を逆関数法で生成するために, 累積分布関数の逆関数を求めよう．

1. 累積分布関数 $F(x)$ を求めよう．グラフ $y = F(x)$ を描こう．
2. $y = F(x)$ の逆関数 $x = F^{-1}(y)$ を求めよう．

2

離散時間, 離散空間座標のランダムウォークを考える．ウォーカは, 時刻 $t = 0$ には座標 $x = 0$ にいた．遷移確率は,

$$W(y|x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & (y = x + 1), \\ \frac{1}{3} & (y = x - 1), \\ 0 & (\text{それ以外}), \end{cases} \tag{2}$$

つまり, $x \mapsto x + 1$ が $\frac{2}{3}$, $x \mapsto x - 1$ が $\frac{1}{3}$ である．

1. 時刻 $t = 2$ に, ウォーカが $x = 0$ にいる確率を求めよう．
2. 時刻 $t = 3$ に, ウォーカが $x = 0$ にいる確率を求めよう．
3. 時刻 $t = 5$ に, ウォーカが $x = 1$ にいる確率を求めよう．
4. ウォーカが, t 回中 m 回だけ $x \mapsto x + 1$ と移動した結果, 時刻 t に位置 x にいたという．整数 m を x と t で表わそう．
5. 時刻 $t(\geqq 0)$ に, ウォーカが座標 x にいる確率 $P(x, t)$ を求めよう．

---

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

3

連続な値をとる確率変数 R が, 確率密度関数

$$p(r) = \begin{cases} \frac{3}{2} & (-\frac{1}{2} \leqq r < 0), \\ \frac{1}{8} & (0 \leqq r < 2), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{3}$$

に従うとする.

1. 平均 $\mu_R = E(R)$ を求めよう.
2. 分散 $\sigma_R^2 = E((R - \mu_R)^2)$ を求めよう.
3. $R \geqq 1$ となる確率を求めよう.
4. 確率密度関数 $p(r)$ に従う乱数を返す関数 `double myrandom()` の定義を C 言語で書こう. ただし, $[0, 1)$ 一様乱数を返す関数 `double get_uniform_random()` は使えるものとする. また, 必要なら `math.h` で宣言されている関数も使ってよい.
5. R と同じ分布に従う独立な確率変数 $R(t), t = 0, \ldots, n-1$ を考える. $X(n) = (R(0) + \cdots + R(n-1))/n$ もまた, 確率変数である. 中心極限定理から, 平均 $\mu_{X(n)}$ と分散 $\sigma_{X(n)}^2$ を求めよう. また, 中心極限定理から, $X(100)$ の確率密度関数の概形を描こう.

4

離散時間, 離散空間座標のランダムウォークを考える. ウォーカーは, 時刻 $t = 0$ には座標 $x = 0$ にいた. 遷移確率は,

$$W(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (y = x + 1), \\ \frac{3}{10} & (y = x - 1), \\ \frac{1}{5} & (y = x), \\ 0 & (\text{それ以外}), \end{cases} \tag{4}$$

つまり, $x \mapsto x + 1$ が $1/2$, $x \mapsto x - 1$ が $3/10$, $x \mapsto x$ が $1/5$ である. これをシミュレートするプログラムを書きたい.

その準備として, 乱数の使い方を示すプログラム 1 を作成した. コンパイルし実行したところ, 結果 1 のような出力を得た.

1. プログラム 2 は, このウォーカの各時刻における座標を表示するプログラムとしては間違えている. プログラム 2 を, プログラム 1 と同じようにコンパイル, 実行したときの出力の最初の 4 行を示し, どのように間違えているか日本語で述べよう.
2. プログラム 3 は, このウォーカの各時刻における座標を表示するプログラムとしては間違えている. プログラム 3 を, プログラム 1 と同じようにコンパイル, 実行したときの出力の最初の 4 行を示し, どのように間違えているか日本語で述べよう.
3. このウォーカの各時刻における座標を (正しく) 表示するプログラムを書こう. ただし, プログラム 1 の `/** A **/` と `/** B **/` の内側だけを変更することにして, その部分だけを答えよう.

プログラム 1

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

double get_uniform_random();

int main(int argc, char **argv){
  unsigned int seed=1109;
  int n=10;
  int t;
  /********* A ****************/
  double x;

  srand(seed);
  for(t=0; t<n; t++){
    x=get_uniform_random();
    printf("%d %f\n", t,x);
  }
  /********* B ****************/
  return 0;
}
/** [0,1) 一様乱数を返す関数 */
double get_uniform_random(){
  return (double)rand()/
    ((double)RAND_MAX+1.0);
}
```

結果 1

```
0 0.922149
1 0.579174
2 0.611352
3 0.474750
4 0.312079
5 0.864588
6 0.841923
7 0.151289
8 0.759848
9 0.367559
```

プログラム 2

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

double get_uniform_random();

int main(int argc, char **argv){
  unsigned int seed=1109;
  int n=10;
  int t;
  /********* A ****************/
  int x=0;
  double r;

  for(t=0; t<=n; t++){
    printf("%d %d\n", t,x);

    srand(seed);
    r=get_uniform_random();
    if( r<1.0/2.0){
      x++;
    } else if ( r < 4.0/5.0 ){
      x--;
    }

  }
  /********* B ****************/
  return 0;
}
/** [0,1) 一様乱数を返す関数 */
double get_uniform_random(){
  return (double)rand()/
    ((double)RAND_MAX+1.0);
}
```

プログラム 3

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

double get_uniform_random();

int main(int argc, char **argv){
  unsigned int seed=1109;
  int n=10;
  int t;
  /********* A ****************/
  int x=0;

  srand(seed);
  for(t=0; t<=n; t++){
    printf("%d %d\n", t,x);

    if(get_uniform_random()<1.0/2.0){
      x++;
    } else if(get_uniform_random()
                              < 4.0/5.0){
      x--;
    }

  }
  /********* B ****************/
  return 0;
}
/** [0,1) 一様乱数を返す関数 */
double get_uniform_random(){
  return (double)rand()/
    ((double)RAND_MAX+1.0);
}
```

点数のお知らせ

各自の点数は, 生協メール (アドレス t040*nnnx*@ryukoku-u.jp) で個別にお知らせします. ここに届いたメールは, Web ページ http://www.seikyou.ne.jp/ryukoku/ で見られます.

計算科学 II[2] プチテスト略解

龍谷大学理工学部数理情報学科 2004 年 11 月 09 日樋口さぶろお[3]

1

1. $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s=\begin{cases}0 & (x<-2),\\ 1 & (x\geqq 2),\\ \int_{-2}^{x}(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}s)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{3}{4} & (-2\leqq x<2).\end{cases} \tag{1}$$

2. $y=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}x^2+\frac{3}{4}$ を x について解く. 2 次方程式 $x^2-4x+(16y-12)=0$ に解の公式を使って, $x=2\pm 4\sqrt{1-y}$. F^{-1} の値域が $-2\leqq x<2$ であることから,

$$F^{-1}(y)=2-4\sqrt{1-y}. \tag{2}$$

2

1. $0\mapsto +1\mapsto 0$ の確率が $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$. $0\mapsto -1\mapsto 0$ の確率が $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$. 和を考えて $\frac{4}{9}$.
2. t と x の偶奇が異るので, $t=3$ に $x=0$ に到達するような経路はなく, 確率は 0.
3. $x\mapsto x+1$ を 3 回, $x\mapsto x-1$ を 2 回行えばよいので,

$$(\tfrac{2}{3})^3(\tfrac{1}{3})^2\binom{5}{3}=\frac{2^3\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{3^5\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{80}{243}. \tag{3}$$

4. $x\mapsto x+1$ を m 回, $x\mapsto x-1$ を $t-m$ 回行った後の座標は, $x=m-(t-m)$. よって, $m=(x+t)/2$.
5. $m=(x+t)/2$ が整数でないと経路は存在しないので,

$$P(x,t)=\begin{cases}(\frac{2}{3})^{(t+x)/2}(\frac{1}{3})^{t-(t+x)/2}\binom{t}{\frac{t+x}{2}} & ((t+x)/2\text{ が整数}),\\ 0 & ((t+x)/2\text{ が整数でない}).\end{cases} \tag{4}$$

---

[2] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath1/

[3] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

3

1.

$$
\begin{aligned}
\mu_R &= \int_{-\infty}^{+\infty} r \cdot p(r)\mathrm{d}r \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} r \cdot \tfrac{3}{2}\mathrm{d}r + \int_{0}^{2} r \cdot \tfrac{1}{8}\mathrm{d}r = -\tfrac{3}{16} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{16}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\sigma_R^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 \cdot p(r)\mathrm{d}r - \mu_R^2 \\
&= \cdots = \tfrac{19}{48} - (\tfrac{1}{16})^2 = \tfrac{301}{768}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

3.

$$
\int_{1}^{+\infty} p(r)\mathrm{d}r = \tfrac{1}{8}. \tag{7}
$$

4.

```
double myrandom(){
  double x,y;
  y=get_uniform_random();

  if( y < 3.0/4.0 ){
     x=y *4.0/3.0/2.0-0.5;
  } else {
     x=(y-3.0/4.0)*4.0 * 2.0;
  }
  return x;
}
```

5. 中心極限定理より $\mu_{X(n)} = \mu_R = \frac{1}{16}$, $\sigma_{X(n)}^2 = \sigma_R^2/n = \frac{301}{768n}$.

4

1. 毎回シードをセットし直すので, すべての `rand()` が同じ数 0.9222149 を返し, 毎回 $x \mapsto x$ となる.

```
0 0
1 0
2 0
3 0
```

2. `if` の条件と `else if` の条件とで異なる乱数が使われ, $x \mapsto x-1$ の確率が $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ となる.

```
0 0
1 -1
2 -2
3 -1
```

3.

```
/********A***************/
  int x=0;
  double r;

  srand(seed);
  for(t=0; t<=n; t++){
    printf("%d %f\n", t,x);

    r=get_uniform_random();
    if( r<1.0/2.0 ){
      x++;
    } else if ( r<4.0/5.0 ){
      x--;
    }

  }
/********B***************/
```