計算科学☆演習 II プチテスト

樋口さぶろお[*1] 配布: 2011-06-03 Tue 更新: Time-stamp: "2011-06-03 Fri 09:47 JST hig"

プチテスト参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

離散的確率変数 S は

値 $s=1$ を確率 $P=1/8$ で
値 $s=2$ を確率 $P=1/4$ で
値 $s=3$ を確率 $P=5/8$ で

とる.

1. 平均 $\mathrm{E}(S)$ を求めよう.
2. 分散 $\mathrm{V}(S)$ を求めよう.
3. 期待値 $\mathrm{E}(\sin(\frac{1}{2}S\pi))$ を求めよう.

2

連続型確率変数 S は確率密度関数

$$p(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}s & (0\le s<2)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

を持つ

1. $1\le s<3$ となる確率を求めよう.
2. 平均 $\mathrm{E}(S)$ を求めよう.

[*1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=0$ に $x=0$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{3}$ で x から $x+1$ に移動
確率 $\frac{2}{3}$ で x から $x-1$ に移動

する.

1. 時刻 $t=5$ に, $x=1$ にいる確率を求めよう.
2. 時刻 t における座標 X_t の平均 $\mathrm{E}(X_t)$ を求めよう.
3. 時刻 t における座標 X_t の分散 $\mathrm{V}(X_t)$ を求めよう.

4

過程不要

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=0$ に $x=3$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $1/7$ で x から $x+1$ に移動
確率 $4/7$ で移動しない
確率 $2/7$ で x から $x-1$ に移動

するものとする.

時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $P(x,t)$ の (t に関する) 漸化式と初期条件を求めよう.

5

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $P(x,t)$ が

$$\text{漸化式 } P(x,t+1) = \tfrac{2}{5}P(x-2,t) + \tfrac{3}{5}P(x+1,t)$$

$$\text{初期条件 } P(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (x=-1) \\ \frac{2}{3} & (x=+1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を満たす.

生成関数 $Z(\lambda,t) = \displaystyle\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x,t)$ を考える.

1. 生成関数 $Z(\lambda,t)$ の満たす漸化式と初期条件を求めよう.
2. 生成関数 $Z(\lambda,t)$ の具体的な形を求めよう.

6

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率を $P(x,t)$ とする.
生成関数 $Z(\lambda,t) = \displaystyle\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x,t)$ が,

$$Z(\lambda,t) = (\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\lambda} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{3\lambda})^t$$

であるとき, 時刻 t における座標 X_t の平均 $\mathrm{E}(X_t)$ を求めよう.

7

過程不要

離散的確率変数 S は

値 $s = 1$ を確率 $P = 1/8$ で,
値 $s = 2$ を確率 $P = 1/4$ で,
値 $s = 3$ を確率 $P = 5/8$ で

とる．シードを入力すると，この確率分布に従う乱数を 100 回出力するプログラムを次のように書いた．

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int getrandom(double y);
double uniform();

int main(){
  int n,seed;
  scanf("%d",&seed);
  srand(seed);
  for(n=0;n<100;n++){
    printf("%d,%d\n",n,getrandom(uniform()));
  }
  return 0;
}

int getrandom(double y){
  /*ないしょ*/
}

double uniform(){
  return rand()/(1.0+RAND_MAX);
}
```

/***ないしょ***/部分を答えよう．ただし，この部分で `uniform`,`rand` を使ってはいけない．

8

$\boxed{\textbf{過程不要}}$

連続型確率変数 S は確率密度関数

$$p(s) = \begin{cases} 3 & (-1 \leq s < -\frac{3}{4}) \\ \frac{1}{3} & (\frac{1}{4} \leq s < 1) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

を持つ．この確率密度関数に従う乱数を生成するための `double getrandom(double y)` を C 言語で書こう．ここで, y としては [0,1) 一様乱数 (`uniform()` の出力) を与える．

ただし, `getrandom` の中で `uniform`,`rand` を使ってはいけない．

9

連続型確率変数 S は確率密度関数

$$p(s) = \begin{cases} 4 - 8s & (0 \leq s < \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を持つ．この確率密度関数に従う乱数を逆関数法で生成する．つまり, y が $[0,1)$ 一様乱数であるとき, $g(y)$ (`double getrandom(double y)`) が $p(s)$ に従うようにする．関数 $g(y)$ を定めよう．

10

次の 2 つのプログラムは，最初にシードを入力すると，乱数で $1, 2, 3$ をそれぞれ確率 $1/3$ で選んで出力することを 100 回繰り返すプログラムを書こうとして眠さのあまり間違えた 2 つの例である．どちらもつまらない文法的な誤りはなく，コンパイル，実行可能であり，2 つの間の差は 9–18 行だけである．

1. 誤プログラム 1 はどのような動作をするか
2. 誤プログラム 2 はどのような動作をするか

確率…で (または，必ず) …を出力する，などのように答えよう．

ソースコード 1　誤プログラム 1

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  
4  double uniform();
5  
6  int main(){
7    int i;
8    int seed;
9    double y;
10   int s;
11 
12   scanf("%d",&seed);
13   for(i=0;i<100;i++){
14     srand(seed);
15     y=uniform();
16     if(y<1.0/3.0){
17       s=1;
18     } else if(y<2.0/3.0){
19       s=2;
20     } else {
21       s=3;
22     }
23     printf("%d\n",s);
24   }
25   return 0;
26 }
27 
28 double uniform(){
29   return rand()/(1.0+RAND_MAX);
30 }
```

ソースコード 2　誤プログラム 2

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  
4  double uniform();
5  
6  int main(){
7    int i;
8    int seed;
9  /*  double y; */
10   int s;
11 
12   scanf("%d",&seed);
13   srand(seed);
14   for(i=0;i<100;i++){
15 /*    y=uniform();    */
16     if(uniform()<1.0/3.0){
17       s=1;
18     } else if(uniform()<2.0/3.0){
19       s=2;
20     } else {
21       s=3;
22     }
23     printf("%d\n",s);
24   }
25   return 0;
26 }
27 
28 double uniform(){
29   return rand()/(1.0+RAND_MAX);
30 }
```

計算科学☆演習 II プチテスト略解

樋口さぶろお[*2]　　配布: 2011-06-03 Tue 更新: Time-stamp: "2011-06-03 Fri 09:47 JST hig"

1

1. $\mathrm{E}(S) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{2}$.
2. $\mathrm{E}(S^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{27}{4}$. $\mathrm{V}(S) = \mathrm{E}(S^2) - (\mathrm{E}(S))^2 = \frac{1}{2}$.
3. $\mathrm{E}(\sin(\frac{1}{2}S\pi)) = \sin(\frac{1}{2}\pi) \cdot \frac{1}{8} + \sin(\frac{2}{2}\pi) \cdot \frac{1}{4} + \sin(\frac{3}{2}\pi) \cdot \frac{5}{8} = -\frac{1}{2}$.

2

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2}s \, \mathrm{d}s = \frac{3}{4}$.
2. $\displaystyle\int_0^2 s \cdot \frac{1}{2}s \, \mathrm{d}s = \frac{4}{3}$.

3

1. 5 回中, $+$ 方向に 3 回, $-$ 方向に 2 回移動すればよい. 2 項定理より, ${}_5\mathrm{C}_3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2 = \frac{40}{243}$.
2. 1 回あたりの移動 S_t の平均は $\mathrm{E}(S_t) = (+1)\frac{1}{3} + (-1)\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$. よって, $\mathrm{E}(X_t) = 0 - \frac{1}{3}t$.
3. 1 回あたりの移動 S_t の分散は $\mathrm{V}(S_t) = \frac{8}{9}$. よって, $\mathrm{V}(X_t) = \frac{8}{9}t$.

4

$$P(x, t+1) = \frac{1}{7}P(x-1, t) + \frac{4}{7}P(x, t) + \frac{2}{7}P(x+1, t)$$

$$P(x, 0) = \begin{cases} 1 & (x = 3) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

5

1. 両辺に $\mathrm{e}^{\lambda x}$ をかけて和をとり

$$\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x, t{+}1) = \tfrac{2}{5}\mathrm{e}^{2\lambda} \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda(x-2)} P(x{-}2, t) + \tfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda(x+1)} P(x{+}1, t).$$

よって漸化式は

$$Z(\lambda, t+1) = (\tfrac{2}{5}\mathrm{e}^{2\lambda} + \tfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-\lambda}) Z(\lambda, t)$$

また, 初期条件は, 定義から

$$Z(\lambda, 0) = \cdots + 0 + \mathrm{e}^{\lambda(-1)}\tfrac{1}{3} + \mathrm{e}^{\lambda\cdot 0}0 + \mathrm{e}^{\lambda(+1)}\tfrac{2}{3} + 0 + \cdots = \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-\lambda} + \tfrac{2}{3}\mathrm{e}^{+\lambda}$$

2. 等比数列なので

$$Z(\lambda, t) = (\tfrac{2}{5}\mathrm{e}^{2\lambda} + \tfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-\lambda})^t (\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-\lambda} + \tfrac{2}{3}\mathrm{e}^{+\lambda})$$

6

$$\mathrm{E}(X_t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} Z(\lambda, t)\Big|_{\lambda=0} = \tfrac{1}{4}t.$$

7

```
if(y<1.0/8.0){
  return 1;
} else if (y<3.0/8.0){
  return 2;
} else {
  return 3;
}
```

8

$\frac{3}{4}$ の確率で $[-1, -\frac{3}{4})$ で一様な乱数 $\frac{1}{4}$ の確率で $[\frac{1}{4}, 1)$ で一様な乱数を出力する必要がある.

```
double getrandom(double y){
  if(y<3.0/4.0){
    return y/3.0-1.0;
  } else {
    return 3.0*(y-3.0/4.0)+1.0/4.0;
  }
}
```

9

累積分布関数は

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} p(s)\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 0 & (a < 0) \\ 4(1-a^2) & (0 \le a < \frac{1}{2}) \\ 1 & (\frac{1}{2} \le a) \end{cases} .$$

値域が $0 \le g(y) < \frac{1}{2}$ となるように $F(g(y)) = y$ を解いて逆関数を求めると,

$$g(y) = \frac{1-\sqrt{1-y}}{2}.$$

10

1. `for` ループの中で乱数が毎回 seed によってリセットされるので, 入力した seed に応じて最初に $1, 2, 3$ のうち 1 つが選ばれ, 毎回必ずその数が, 100 回繰り返して出力される.
2. `if-else if` の条件で呼ばれる `uniform()` は毎回異なる結果を返すので, 1 が確率 $\frac{1}{3}$ で, 2 が確率 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ で, 3 が確率 $1 - \frac{1}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ で出力される.