連続型確率変数と擬似乱数

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆演習 II L08(2015-05-29 Fri)

最終更新: Time-stamp: ”2015-05-29 Fri 07:41 JST hig”

今日の目標

- 連続型確率変数の母平均値, 母分散, 母期待値, 確率を確率密度関数から計算できる
- 区分的定数の確率密度関数に従う擬似乱数を生成するプログラムを書ける

http://hig3.net

L07-Q3

Quiz 解答:漸化式　境界条件は「うまくいっていて」, 左には無限に続いているとする.

実質的に, 左 $\times 0.2+$ 右上 $\times 0.8$ という誤った計算になる.

$t \backslash x$	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0	0	1.0	0	0	0
1	0	0	0.8	0.16	0.032	0.0064	0.00128
2	0	0.64	0.256	0.0768	0.02048	0.00512	0.001024

[正しい] 数値計算の結果と比較してみてね.

ここまで来たよ

1. 略解:偏微分方程式とその数値計算
2. 連続型確率変数と擬似乱数
   - 連続型確率変数
   - 連続的な確率変数の擬似乱数

離散型と連続型の確率変数

離散型:確率 (関数)

得点 r_i	確率 $p_i = P(R = r_i)$
0	0.0667
1	0.2
2	0.3333
3	0.3
4	0.1

連続型:確率密度関数

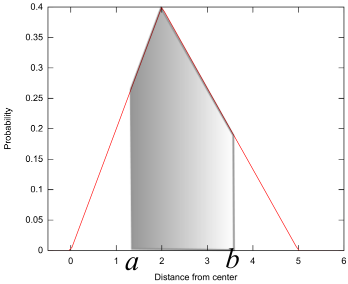
- $f(r)$ が大きいほど, その値 r が $\boxed{}$
- $0 \leq f(r)$.
- $f(r)$ は 1 を超えることもある.

確率密度関数 $f(r)$ の意味

$$P(a \le R < b) = f(r) \text{ のグラフの下の面積} = \int_a^b f(r)\,\mathrm{d}r.$$

$$\text{全確率} = 1 = f(r) \text{ のグラフの下全体の面積} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)\,\mathrm{d}r.$$

じゃあ, ちょうど距離 $r = a$ cm となる確率は? $\rightsquigarrow \boxed{}$.



連続型確率変数の母期待値

母期待値

$$\text{離散型} \quad \mathrm{E}[\phi(R)] = \sum_i \phi(r_i) \cdot p_i$$

$$\text{連続型} \quad \mathrm{E}[\phi(R)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(r) f(r)\, \mathrm{d}r$$

L08-Q1

Quiz(連続的な値をとる確率変数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 R を考える.

$$f(r) = \begin{cases} 1/5 & (-3 \le r < 2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

1. $-4 \le R < -2$ となる確率を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[R]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[R]$ を求めよう.
4. 母期待値 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^R]$ を求めよう.

L08-Q2

Quiz(連続値確率変数の母平均値と母分散)

連続値確率変数 X の確率密度関数が,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \leq x < 1) \\ \frac{1}{4} & (1 \leq x < 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

で与えられる.

1. X の母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. X の母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

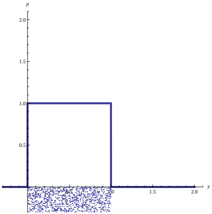
ここまで来たよ

連続的な確率変数の擬似乱数

`double getuniform()` はその一例. $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ という.
以後しばらく, Y と書いたらこれのこと. 確率変数 Y の確率密度関数は

$$f(y) = \begin{cases} 1 & (0 \leq y < 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

一様 $\Leftrightarrow$ $f(y)$ が定数. 同様に確からしい.

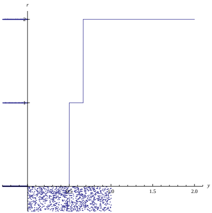


今までは, これを int getrandom(double y) で, 離散的な擬似乱数 r に '変換' していた.

離散型乱数の復習

R	確率
0	$1/2$
1	$1/6$
2	$1/3$

```
int getrandom(double y){
  int r;
  if(y<3/6.0){
    r=0;
  }else if(y<(3+1)/6.0){
    r=1;
  }else{
    r=2;
  }
  return r;
}
```



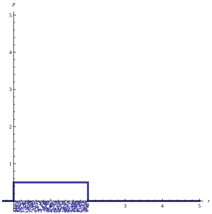
$$g(y) = \begin{cases} 0 & (0 \le y < 1/2) \\ 1 & (1/2 \le y < 2/3) \\ 2 & (2/3 \le y < 1) \end{cases}$$

y の標本 (サイズ 5)	0.31	0.82	0.49	0.04	0.40
r の標本 (サイズ 5)	0	2	0	0	0

$[0,2)$ 一様乱数を作るには?

$$f(r) = \begin{cases} \boxed{?} & (0 \le r < 2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

```
double getrandom(double y){
  double r;
  r=???              ;
  return r;
}
r=getrandom(getuniform());
```



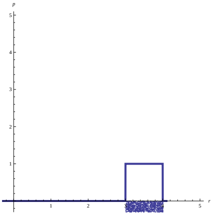
$r = g(y) = \boxed{???}$

y の標本 (サイズ 5)	0.31	0.82	0.49	0.04	0.40
r の標本 (サイズ 5)	0.62	1.64	0.98	0.08	0.80

$[3,4)$ 一様乱数を作るには?

$$p(r) = \begin{cases} \boxed{?} & (3 \le r < 4) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

```
double getrandom(double y){
  double r;
  r=???          ;
  return r;
}
r=getrandom(getuniform());
```

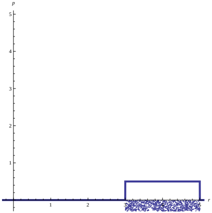


$r = g(y) = \boxed{???}$.

y の標本 (サイズ 5)	0.31	0.82	0.49	0.04	0.40
r の標本 (サイズ 5)	3.31	3.82	3.49	3.04	3.40

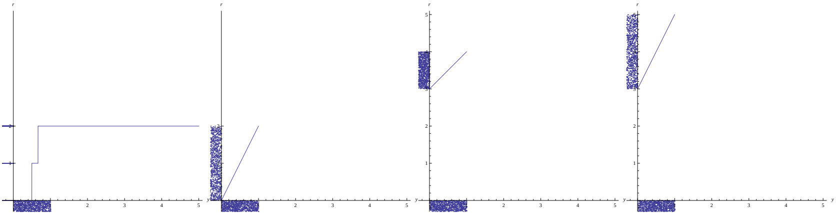
じゃあこんな場合?

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (3 \leq r < 5) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$



$$r = g(y) = ???$$

解釈



自分の言葉でどうぞ

一様でないときは? まず $f(r)$ が区分的に定数なときをやろう

L08-Q3

Quiz(連続的な値をとる疑似乱数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 R を考える.

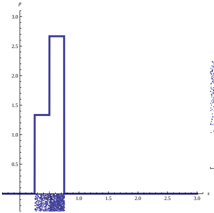
$$f(r) = \begin{cases} 4/3 & (1/4 \le r < 1/2) \\ 8/3 & (1/2 \le r < 3/4) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

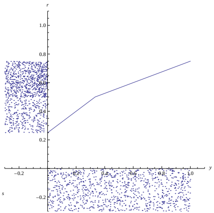
R に対応する疑似乱数を返す関数 `double getrandom(double y)` を書こう.

区分的に定数な $f(r)$ に対する $g(y)$ =getrandom の求め方

1. r の区間ごとの確率を求める
2. y の $[0,1)$ 区間をその確率で分割して場合分けする
3. y の各区間が, r の区間に写るような 1 次関数 $r = g(y) = Ay + B$ を求める

$g(y)$ は $\boxed{}$


p
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
s


r
1.0
0.8
0.2
−0.2
y
−0.2

L08-Q4

Quiz(連続的な値をとる疑似乱数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 S を考える.

$$f(s) = \begin{cases} 1/5 & (-3 \leq s < 2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

S に対応する疑似乱数を返す関数 `double getrandom(double y)` を書こう.

L08-Q5

Quiz(連続的な値をとる疑似乱数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 R を考える.

$$f(r) = \begin{cases} 1/10 & (0 \leq r < 2) \\ 4 & (2 \leq r < 11/5) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

R に対応する疑似乱数を返すための $g(y)$ を書こう.

お知らせ

Math ラウンジ=チューター
月火水木昼.
数学検定
2015-06-03 水 申込締切, 07-11 土午後 検定
特別講義
2015-06-24 水 4 らしい.
数理情報演習履修説明会
2015-06-24 水 5 らしい.
e ラーニング予習問題ふつうのペースにもどってます. 次は 2015-06-02 火 23:55 締切

manaba 出席カード提出
`https://attend.ryukoku.ac.jp`

(講義の) プチテストやります!

- 日時 2015-06-05 金 2 90 分
- 講義の 30 ピーナッツ
- 外部記憶ペーパー**なし**

出題計画 (2015-05-29 金確定版) 2014 の過去問題とは時期も内容も違うことに注意. 出題について演習と講義の両方から出題します.
プログラミングの問題はありますが, Windows や Excel や Visual Studio の問題はありません.

- 標本が与えられたとき標本平均値, 標本分散, 標本標準偏差, 標本期待値の計算 (L02)
- X のルールから場合の数を使ってランダムウォークの $P(x,t)$ を求める (L03)
- X のルールからランダムウォークの $\mathrm{E}[X(t)], \mathrm{V}[X(t)]$ を求める (L03)
- X のルールから $P(x,t)$ の初項と漸化式を求める (L04)
- $P(x,t)$ の初項と漸化式から $M(\lambda,t)$ の初項と漸化式を求め, M を求める (L05)
- $M(\lambda,t)$ から確率 $P(x,t)$ と期待値 $\mathrm{E}[\phi(X)]$ を求める (L06)
- 偏微分方程式の数値計算の方法とプログラム (L07)
- C での擬似乱数 (srand, rand) の使い方 (L01)
- 連続型確率変数が与えられたとき母平均値, 母分散, 母標準偏差, 母期待値の計算 (L08)
- 区分的に定数な確率密度関数を生成する double getrandom(double y) (L08)