確率変数の変数変換・rw と diff

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆演習 II L09(2015-06-12 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-06-12 Fri 08:53 JST hig"

今日の目標

- rw / diff が, それぞれラグランジュ / オイラー, 標本ナントカ と 母ナントカであることを説明できる.
- 確率変数 R と $Q = f(R)$ の確率密度関数の関係が説明できる

http://hig3.net

L09-Q2
Quiz 解答:連続値確率変数の母平均値と母分散

1. $\mathrm{E}[X] = \frac{5}{4}$.
2. $\mathrm{V}[X] = \frac{37}{48}$.

L09-Q3
Quiz 解答:連続的な値をとる疑似乱数

```
double getrandom(double y){
  double r;
  if(y<1.0/3){
    r=3.0/4*y+1.0/4;
  } else {
    r=3.0/8*(y-1)+3.0/4;
  }
  return r;
}
```

L09-Q5

Quiz 解答:連続的な値をとる疑似乱数

$$g(y) = \begin{cases} 10y & (0 \le y < \frac{1}{5}) \\ \frac{1}{4}(y - \frac{1}{5}) + 2 & (\frac{1}{5} \le y < 1) \end{cases}$$

`http://hig3.net` → 計算科学☆演習 II に類題の動画解説あります.

ここまで来たよ

1. 略解:連続型確率変数と擬似乱数
2. 確率変数の変数変換・rw と diff
   - 確率変数の変数変換
3. rw と diff
   - rw はラグランジュ表現, diff はオイラー表現
   - rw は標本ナントカ, diff は母ナントカ

変数変換

例で考えます.
Q: 連続型確率変数 ('正方形クッキーの面積 or クッキー生地の質量').
確率密度関数

$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{36} & (64 \leq q < 100) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$R = g(Q) = \sqrt{Q}$: これも連続型確率変数 ('クッキーの一辺'),

問

確率密度関数 $f_R(r) =?$

Excel に貼った標本

Q	$R = \sqrt{Q}$
81	9.00
96	9.80
⋮	⋮
64	8.00

L09-Q1

クッキーの一辺

1. 確率密度関数から $\mathrm{E}[R]$ を計算しよう.
2. 確率密度関数から $R < 9$ となる確率を求めよう.
3. R の標本 $8, 8, 8.5, 9, 9.5$ から $\mathrm{E}[R]$ を推定しよう.
4. Q の標本 $64, 64, 81, 81, 81$ から $\mathrm{E}[R]$ を推定しよう.

R の確率密度関数 $f_R(r)$ は?

原理

$$
\begin{aligned}
P(g(a) \le R < g(b)) =& P(a \le Q < b) \\
\int_{g(a)}^{g(b)} f_R(r)\,\mathrm{d}r =& \int_a^b f_Q(q)\,\mathrm{d}q
\end{aligned}
$$

確率密度関数の原理+おぼえ方

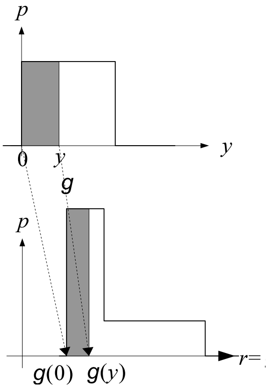
$\boxed{f(r)\,\mathrm{d}r \text{ は変数変換しても不変}}$

$$f_R(r) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}(q)} f_Q(q)$$

ただし, 右辺で $q = g^{-1}(r)$.

cont1 の種明かし

getrandom で $[0,1)$ 一様乱数 $Y(=Q)$ から別の乱数 R を生成するのは, 実はこれ利用してた.



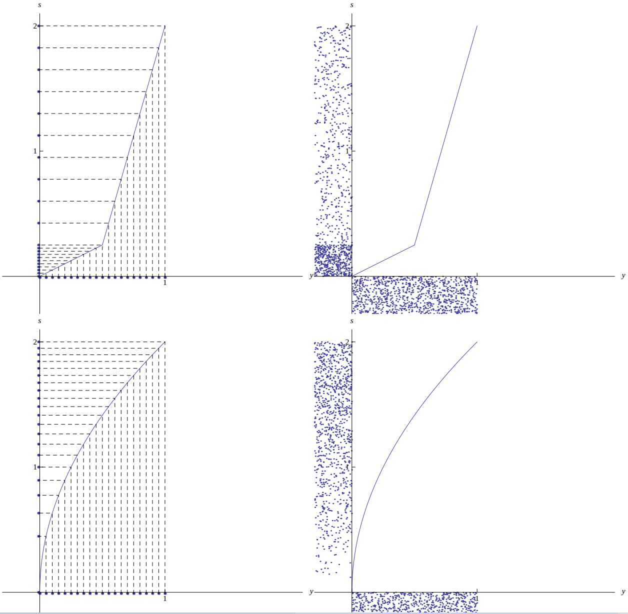
$$f_Q(q) = f_Y(y) = \begin{cases} 1 & (0 \le y < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$$r = g(y) = Ay + B.$$

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{g'} \cdot 1 = \frac{1}{A} & (B \le r < A + B) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$f_Q(q) = c$ (定数) のとき, $f_R(r) = \frac{c}{g\ \text{の傾き}}$

横軸 q, 縦軸 r, グラフ $r = r(q) = g(q)$.



g の傾き大 $\Leftrightarrow$ $f_R(r)$ 小.

L09-Q2

Quiz(確率変数の変換)

$[0,1)$ 一様分布に従う連続型確率変数 Y と, $R = g(Y) = \mathrm{e}^Y$ で定まる連続型確率変数 R を考える.

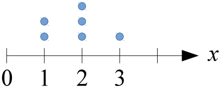
1. $\mathrm{E}[R^2]$ を求めよう.
2. $R < 2$ となる確率を求めよう.
3. R の確率密度関数 $f_R(r)$ を求めよう.

ここまで来たよ

1. 略解:連続型確率変数と擬似乱数
2. 確率変数の変数変換・rw と diff
   - 確率変数の変数変換
3. rw と diff
   - rw はラグランジュ表現, diff はオイラー表現
   - rw は標本ナントカ, diff は母ナントカ

ラグランジュ表現

確率は忘れて, ウォーカーが大勢 (下では 6 人) いる状況を考えよう.



ラグランジュ表現

数式的

$x^{(m)}(t)$: ウォーカー番号 m 番の, 時刻 t の座標.

上の状況なら

$x^{(0)}(t) = 1, x^{(1)}(t) = 2, x^{(2)}(t) = 2, x^{(3)}(t) = 3, x^{(4)}(t) = 1, x^{(5)}(t) = 2.$

C 的

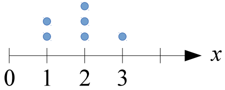
`x[m]` ウォーカー番号 m 番の座標 (時刻 t とともに, この変数を更新)

```
int x[6]; /*配列の宣言*/
```

または,

```
int x[]={1,2,2,3,1,2}; /*配列の宣言兼代入*/
```

オイラー表現



数式的

$U(x,t)$: 時刻 t に, 座標 x にいるウォーカーの人数.
上の状況なら
$U(0,t)=0, U(1,t)=2, U(2,t)=3, U(3,t)=1, U(他,t)=0.$

C 的

U[x] 座標 x にいるウォーカーの人数 (時刻 t とともに更新)
int U[100]; /*配列の宣言. $100-1=x$ 座標の上限*/
または
int U[]={0,2,3,1,0,0,...}; /*配列の宣言兼代入*/

ラグランジュ表現とオイラー表現の比較

	ラグランジュ表現	オイラー表現
座標の値	`int` でも `double` でも	`int` 限定 (配列の添字)
ウォーカーの区別	あり	なし
得意な問		
シューティング	自機,	
ブロック崩し		
テトリス	落下前	落下後
ランダムウォーク (例え話)		

ここまで来たよ

1. 略解:連続型確率変数と擬似乱数

2. 確率変数の変数変換・rw と diff
   - 確率変数の変数変換

3. rw と diff
   - rw はラグランジュ表現, diff はオイラー表現
   - rw は標本ナントカ, diff は母ナントカ

確率の場合: U と P の対応

$x^{(m)}(t), U(x,t)$ で, ランダムウォークのサイズ N のサンプルを表現することもできる.

- $x^{(0)}(t), x^{(2)}(t), \ldots, x^{(N-1)}(t)$.
- 度数 $U(x,t)$. 性質 $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} U(x,t) = N$.
- 相対度数 $u(x,t) = \frac{1}{N} U(x,t)$. 性質 $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} u(x,t) = 1$.

サンプルサイズ $N \to +\infty$ で,
相対度数 $u(x,t) \to$ 母分布 $P(x,t)$
と期待されるので, $P(x,t)$ のことを考えるのに, u, U でイメージしてもいい.

rw,sim は標本ナントカ

サイズ N の標本 $x^{(0)}(t), \ldots, x^{(N-1)}(t)$ をまず抽出し, それを使って母期待値 $\mathrm{E}[\phi(X(t))]$ を推定せよ $\rightsquigarrow$

$$\text{標本期待値}\overline{\phi(X(t))} = \frac{1}{N}[\phi(x^{(0)}(t)) + \cdots + \phi(x^{(N-1)}(t))].$$

特徴

- 標本を抽出するところで乱数を使用
- $\boxed{}$結果
- 標本ナントカを求めて推定している. 厳密な結果ではない (=統計誤差がある). 信頼区間とか考える.
- 確率シミュレーション. ほぼどんな量でも計算できる.

diff,diffexpect は母ナントカ

母分布 $P(x,t)$ をまず計算し, それを使って
母期待値 $\mathrm{E}[\phi(X(t))]$ を計算せよ $\rightsquigarrow$

$$\text{母期待値}\ \mathrm{E}[\phi(X(t))] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \phi(x)P(x,t).$$

特徴

- 漸化式使用. 乱数不要.
- いつでも同じ結果.
- $\boxed{}$ 誤差は数値計算誤差のみ.
- 今後出てくるもっと難しい問題には適用できないことがある. 2 人ウォーカーとか, $P(X(0) = 0$ かつ $X(10) = 5)$ とか出てくると計算できない.

L09-Q3

Quiz(ラグランジュ表現とオイラー表現)

(座標が整数値のみをとる離散型の) ランダムウォークを考える.
6 羽のペンギンが, 座標 $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$ の範囲をランダムウォークする.
ある時刻 t に, $x = 1$ に 2 羽, $x = 3$ に 3 羽, $x = 8$ に 1 羽いるとする.

1. ラグランジュ表現を用いたとき, 配列 `x[]` のサイズはどれだけ必要か. また, 時刻 t に配列の各要素はどのような値をとるか.
2. オイラー表現を用いたとき, 配列 `U[]` のサイズはどれだけ必要か. また, 時刻 t に配列の各要素はどのような値をとるか.

配列のサイズとは, 元の型の変数を何個集めたかという個数. `int x[SIZE];` の `SIZE`.

L09-Q4

Quiz(オイラー表現)

ランダムウォークのオイラー表現, または, 拡散方程式の数値解法のプログラムで, 時刻 t においけいて ウォーカーの座標が $X(t) = x$ である確率 $P(x, t)$ が, すでに計算され, 配列 `u[x+XOFFSET]` に格納されているとする. ただし, $x = -20, -19, \ldots, 14, 15$.

```
 #define XOFFSET 20
double u[36];
```

1. $\mathrm{E}[X(t)]$ を計算して `double ex;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.
2. $P(X(t) \leq 5)$ を計算して `double px;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.

両者を同時に計算する 1 個のプログラム (の一部) でもよい.

お知らせ

Math ラウンジ=チューター
月火水木昼.
スケジュール
2015-06-24 水 3 計算科学演習 初夏のプチテスト 30 ピーナッツ出題計画 (来週確定)

- $u(x,t)$ の漸化式を数値的に解く=偏微分方程式の数値解法 (diff1,pde1)
- 連続型確率変数に対応する擬似乱数を生成する (cont1)
- 未定 x1

2015-06-24 水 4 特別講義
2015-06-24 水 5 数理情報演習履修説明会
e ラーニング予習問題ふつうのペースにもどってます. 次は 2015-06-16 火 23:55 締切
manaba 出席カード提出 `https://attend.ryukoku.ac.jp`