ラグランジュ表現とオイラー表現・逆関数法

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆演習 II L10(2015-06-19 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-07-18 Sat 10:47 JST hig"

今日の目標

- ラグランジュ表現とオイラー表現の特徴を説明できる.
- 与えられた確率密度関数 $f(r)$ にしたがう擬似乱数 R を, $[0,1)$ 一様乱数 Y を $R=g(Y)$ と変換することにより生成できる

http://hig3.net

L10-Q1

Quiz 解答:確率変数の変換

1. $\mathrm{E}[\sqrt{Q}] = \int_{64}^{100} \sqrt{q}\frac{1}{36}\,\mathrm{d}q$.
2. $P(Q < 81) = \int_{64}^{81} \frac{1}{36}\,\mathrm{d}q$.
3. 標本平均値により, $\overline{R} = \frac{1}{5}[8+8+8.5+9+9.5]$ と推定できる.
4. 標本期待値により, $\overline{\sqrt{Q}} = \frac{1}{5}[\sqrt{64}+\sqrt{64}+\sqrt{9}+\sqrt{9}+\sqrt{9}]$ と推定できる.

L10-Q2

Quiz 解答:確率変数の変換

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & (0 \leq y < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$ なので,

1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{e}^{2Y}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2y} f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2y}\cdot 0\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{2y}\cdot 1\,\mathrm{d}y + \int_{1}^{+\infty} \mathrm{e}^{2y}\cdot 0\,\mathrm{d}y \\
&=0 + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1) + 0.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
P(R<2) = P(Y<\log 2) &= \int_{-\infty}^{\log 2} f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{\log 2} 1\,\mathrm{d}y \\
&=0 + \log 2
\end{aligned}$$

3. $f_R(r)\mathrm{d}r = f_Y(y)\mathrm{d}y$ より,

$$f_R(r) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}y}} f_Y(y) = \mathrm{e}^{-y} \times f_Y(y) = \frac{1}{r} \times \begin{cases} 1 & (1 \le r < \mathrm{e}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

なお, この $f_R(r)$ を先に求めた場合は, 1,2 は次のように計算できる.

$$\mathrm{E}[R^2] = \int_{-\infty}^{\infty} r^2 f_R(r)\,\mathrm{d}r = \int_1^{\mathrm{e}} r^2 \cdot \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1).$$

$$P(R < 2) = \int_{-\infty}^{2} f_R(r)\,\mathrm{d}r = 0 + \int_1^2 \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r = \log 2 - \log 1.$$

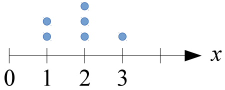
ここまで来たよ

1. 略解:連続型確率変数の変数変換

2. ラグランジュ表現とオイラー表現・逆関数法
   - rw はラグランジュ表現, diff はオイラー表現
   - 連続型確率変数の変数変換の復習
   - 逆関数法

ラグランジュ表現

確率は忘れて, ウォーカーが大勢 (下では 6 人) いる状況を考えよう.



ラグランジュ表現

数式的

$x^{(m)}(t)$: ウォーカー番号 m 番の, 時刻 t の座標.

上の状況なら

$x^{(0)}(t) = 1, x^{(1)}(t) = 2, x^{(2)}(t) = 2, x^{(3)}(t) = 3, x^{(4)}(t) = 1, x^{(5)}(t) = 2.$

C 的

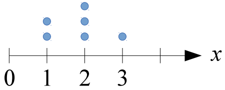
`x[m]` ウォーカー番号 m 番の座標 (時刻 t とともに, この変数を更新)

```
int x[6]; /*配列の宣言*/
```

または,

```
int x[]={1,2,2,3,1,2}; /*配列の宣言兼代入*/
```

オイラー表現



数式的

$U(x,t)$: 時刻 t に, 座標 x にいるウォーカーの人数.
上の状況なら
$U(0,t)=0, U(1,t)=2, U(2,t)=3, U(3,t)=1, U(\text{他},t)=0.$

C 的

`U[x]` 座標 x にいるウォーカーの人数 (時刻 t とともに更新)
`int U[100];` /*配列の宣言. $100-1=x$ 座標の上限*/
または
`int U[]={0,2,3,1,0,0,...};` /*配列の宣言兼代入*/

ラグランジュ表現とオイラー表現の比較

	ラグランジュ表現	オイラー表現
座標の値	`int` でも `double` でも	`int` 限定 (配列の添字)
ウォーカーの区別	あり	なし
得意な問		
シューティング	自機,	
ブロック崩し		
テトリス	落下前	落下後
ランダムウォーク (例え話)		

L10-Q1

Quiz(ラグランジュ表現とオイラー表現)

(座標が整数値のみをとる離散型の) ランダムウォークを考える.
6 羽のペンギンが, 座標 $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$ の範囲をランダムウォークする.
ある時刻 t に, $x = 1$ に 2 羽, $x = 3$ に 3 羽, $x = 8$ に 1 羽いるとする.

1. ラグランジュ表現を用いたとき, 配列 `x[]` のサイズはどれだけ必要か. また, 時刻 t に配列の各要素はどのような値をとるか.
2. オイラー表現を用いたとき, 配列 `U[]` のサイズはどれだけ必要か. また, 時刻 t に配列の各要素はどのような値をとるか.

配列のサイズとは, 元の型の変数を何個集めたかという個数. `int x[SIZE];` の `SIZE`.

L10-Q2

Quiz(オイラー表現)

ランダムウォークのオイラー表現, または, 拡散方程式の数値解法のプログラムで, 時刻 t において ウォーカーの座標が $X(t) = x$ である確率 $P(x,t)$ が, すでに計算され, 配列 `u[x+XOFFSET]` に格納されているとする. ただし, $x = -20, -19, \ldots, 14, 15$.

```
#define XOFFSET 20
#define XSIZE 36
double u[XSIZE];
```

1. $\mathrm{E}[X(t)]$ を計算して `double ex;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.
2. $P(X(t) \leq 5)$ を計算して `double px;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.

両者を同時に計算する 1 個のプログラム (の一部) でもよい.

L10-Q3

Quiz(ラグランジュ表現)

ランダムウォークのラグランジュ表現で, ウォーカーの座標が $X(t)$ の標本が配列 `x[NWALKER]` に格納されているとする.

```
#define NWALKER 6
double x[NWALKER];
```

1. 標本平均値 $\overline{X}$ を計算して `double ex;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.
2. $X(t) \leq 5$ の標本比率を計算して `double px;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.

両者を同時に計算する 1 個のプログラム (の一部) でもよい.

ここまで来たよ

1. 略解:連続型確率変数の変数変換

2. ラグランジュ表現とオイラー表現・逆関数法
   - rw はラグランジュ表現, diff はオイラー表現
   - 連続型確率変数の変数変換の復習
   - 逆関数法

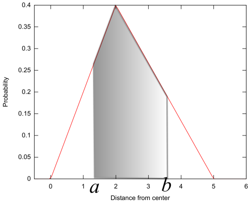
連続型確率変数と確率密度関数の復習

確率密度関数 $f(x)$ の意味

$$\text{期待値 } \mathrm{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$P(a \le X < b) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[a \le X < b]}(X)] = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \quad \boxed{}$$

$$\text{全事象の確率 } 1 = \mathrm{E}[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot f(x)\, \mathrm{d}x.$$



$$\mathbf{1}_{[X \text{ の条件}]}(x) = \begin{cases} 1 & (X = x \text{ が条件を満たす}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$r = r(q) = g(q)$
$f_R(r) \leftrightarrow f_Q(q)$

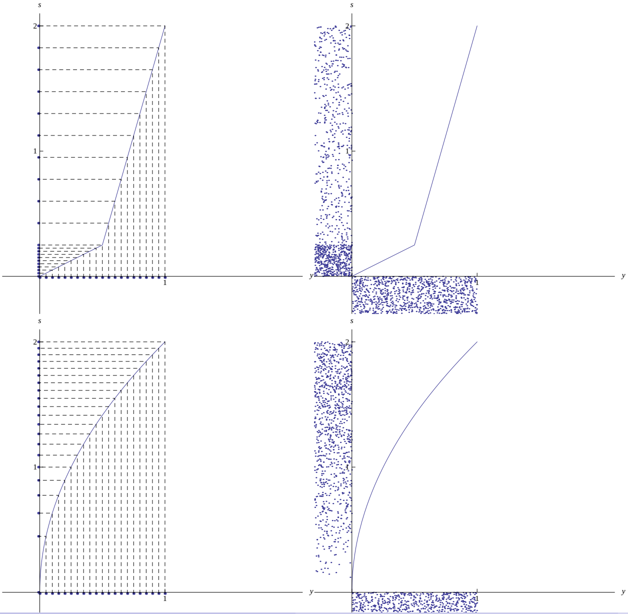
確率密度関数の原理+おぼえ方

$\boxed{f(r)\,\mathrm{d}r \text{ は変数変換しても不変}}$

$$f_R(r) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}(q)} f_Q(q)$$

ただし, 右辺で $q = g^{-1}(r)$.

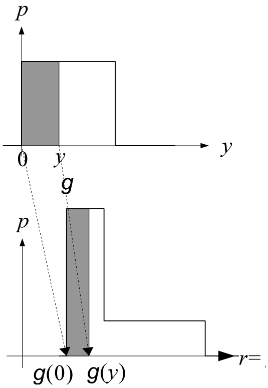
横軸 q, 縦軸 r, グラフ $r = r(q) = g(q)$.



g の傾き大 $\Leftrightarrow$ $f_R(r)$ 小.

cont1 の種明かし

getrandom で $[0,1)$ 一様乱数 $Y(=Q)$ から別の乱数 R を生成するのは, 実はこれ利用してた.



$$f_Q(q) = f_Y(y) = \begin{cases} 1 & (0 \le y < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$$r = g(y) = Ay + B.$$

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{g'} \cdot 1 = \frac{1}{A} & (B \le r < A + B) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$f_Q(q) = c$ (定数) のとき, $f_R(r) = \frac{c}{g\ \text{の傾き}}$

ここまで来たよ

1. 略解:連続型確率変数の変数変換
2. ラグランジュ表現とオイラー表現・逆関数法
   - rw はラグランジュ表現, diff はオイラー表現
   - 連続型確率変数の変数変換の復習
   - 逆関数法

逆関数法

逆に, ある f_R にしたがう擬似乱数が欲しい $\to$ うまい g で $R = g(Y)$ で作ろう!

$[0,1)$ 一様擬似乱数 y	0	$\to$	1
$f_R(r)$ にしたがう r	r_{min}	$\to$	r_{max}

$g(y)$ はどんな関数? 条件は

$$
\begin{aligned}
f_R(r)\,\mathrm{d}r =& f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
f_R(r) =& \frac{1}{\frac{dg}{\mathrm{d}y}(y)} \times f_Y(y)
\end{aligned}
$$

$r = g(y)$ の逆関数を $y = g^{-1}(r)$ とする

$$
f_R(r) = \frac{\mathrm{d}g^{-1}}{\mathrm{d}r}(r) \times \begin{cases} 1 & (0 \le g^{-1}(r) < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}
$$

両辺を $r' = r_{\mathsf{min}}$ から r まで積分.

$$\int_{r_{\mathsf{min}}}^{r} f_R(r')\mathrm{d}r' = [g^{-1}(r)]_{r_{\mathsf{min}}}^{r} = g^{-1}(r) - 0$$

累積分布関数

$$F(r) = \int_{r_{\mathsf{min}}}^{r} f_R(r')\,\mathrm{d}r' = \int_{-\infty}^{r} f_R(r')\,\mathrm{d}r'$$

累積分布関数 $F(r)$ の意味

r	$-\infty$	r_{min}		$+\infty$
$f_R(r) = F'(r)$	$\to 0$	0	≥ 0	$\to 0$
$F(r)$				

L10-Q4

Quiz(累積分布関数)

確率密度関数 $f_R(r)$ を積分した累積分布関数 $F(r) = \int_{-\infty}^{r} f_R(r')\,\mathrm{d}r'$ について, **正しくない**のはどれ?

1. $F(r)$ は連続である
2. $F(r)$ は非減少 (=広義単調増加) 関数である
3. $F(r)$ の定義域は $[0,1)$ である.
4. $F(r)$ の値域は $[0,1]$ である.
5. $F(r)$ は停留点を持つことがある.
6. $F(r)$ は変曲点を持つことがある.

作りたい乱数 R の の累積分布関数 $F(r)$ の逆関数が $g(y)$.

逆関数法 (逆変換法)

$f_R(r)$ に従う乱数を, $r = g(y)$ で $[0, 1)$ 一様乱数 Y から作るには, $g(y)$ を次の様に決めればいい.

1. R の累積分布関数 $F(r) = \displaystyle\int_{-\infty}^{r} f_R(r')\,\mathrm{d}r'$ を計算する.
2. $y = F(r)$ を解いて, 逆関数 $r = F^{-1}(y) = g(y)$ を求める.

L10-Q5

Quiz(逆変換法)

確率密度関数

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}r & (0 \le r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う乱数 R を, $[0,1)$ 一様乱数 y から $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

L10-Q6

Quiz(逆関数法)

確率密度関数

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{2}}{8}\sqrt{r} & (0 \le r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う乱数 R を, $[0,1)$ 一様乱数 y から $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

お知らせ

Math ラウンジ=チューター月火水木昼.
スケジュール 2015-06-24 水 3 計算科学演習 初夏のプチテスト 30 ピーナッツ
出題計画

- $u(x,t)$ の漸化式を数値的に解く=偏微分方程式の数値解法 (diff1,pde1)
- 連続型確率変数に対応する擬似乱数を生成する (cont1) ($g(y)$ の計算過程も必要)
- X(t) の標本のヒストグラムを R コマンダーで描く u(x,t) の横軸 x 縦軸 u の線グラフを R コマンダー orExcel の好きな方で描く (conthisto1, pde1, conttransf1,diffhist1)

2015-06-24 水 4 特別講義 水 5 数理情報演習履修説明会
e ラーニング予習問題 次は 2015-06-26 金 11:05 締切
manaba 出席カード提出 `https://attend.ryukoku.ac.jp`