二人ウォーカー・母比率の検定・ランダムウォークで待ち行列

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆演習 II L13(2015-07-10 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-07-10 Fri 13:15 JST hig"

今日の目標

- ウォーカーが複数人いるときに, 特徴量を求めるプログラムが書ける
- 標本から母比率の検定を行える
- ランダムウォークで待ち行列の長さがモデルできることを説明できる

http://hig3.net

L12-Q1

Quiz 解答:吸収壁ありランダムウォークの確率の計算

$p^3 + p(1-p)^2 \times 2$

L12-Q2

Quiz 解答:与えられた正の辺の本数をもつサンプルパスの個数

確率=与えられた正の辺の本数を持つサンプルパスの個数/サンプルパスの総数 2^4.

正の辺の本数	場合の数	確率
0	6	6/16
1	0	0
2	4	4/16
3	0	0
4	6	6/16
計	2^4	1

L12-Q3

Quiz 解答:サンプルパスの測定

ここまで来たよ

課題 contmrw1: 2 人 (以上) ウォーカーがいるときのシミュレーション

同時に歩く 2 人ウォーカーの座標: $X_1(t), X_2(t)$. それぞれ漸化式と初期条件

物理数学 I

```
#define MMAX 2
double x[MMAX];
for(n){ /*サンプル */
   for(m=0;m<MMAX;m++){ /*ウォーカー番号*/
      x[m]=初期位置;
   }
   for(t){ /* 時間 */
      for(m=0;m<MMAX;m++){ /*ウォーカー番号*/
         x[m]=x[m]+乱数;
      }
   }
}
```

区間推定しろっ

- 2 人のウォーカーが最接近するときの距離の母期待値は?
- 2 人のウォーカーが距離 1.0 以内で過ごす (通算) 時間は?
- 2 人のウォーカーがすれちがう (=座標の大小が逆転する) 確率は?

大注意: $X_m^{(i)}(t)$ $(i = 1, \ldots, N, m = 0, 1, \ldots, M-1, t = 0, 1, \ldots, T)$

N は [　　　　] 無関係に N 回のシミュレーションが繰りかえされる. N は試行の回数. i はレース番号.

M は [　　　　]. m はランナー番号.

T は [　　　　]

オイラー表示では?

$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, t)$. 時間に依存する同時確率

L13-Q1

Quiz(2 人ウォーカーのサンプルパスの測定)

2 人ウォーカーの $0 \le t \le T = 9$ のランダムウォーク.
$(R_1(1), R_1(2), \ldots, R_1(9)) = (+1, -1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, -1)$,
$(R_2(1), R_2(2), \ldots, R_2(9)) = (-1, -1, -1, +1, -1, -1, +1, -1, +1)$
というサイズ 1 の標本を考える. $X_1(0) = 0, X_2(0) = 10$ とする.

1. 2 人のウォーカーが最も近づいた時刻
2. 2 人のウォーカーが最も近づいたときの距離
3. 2 人の距離が 7 以下になった時間の長さ (=t の個数のこと)

ここまで来たよ

課題 contrwnormal1, Quiz L11-Q3 では，ウォーカーの座標が $X(10) > 5$ となる確率 (母比率)p をを区間推定した.
L11-Q3
TA Prob and Sol:母比率の区間推定

ランダムウォークの座標の標本を出力するプログラムを実行した

1. 標本サイズ $N = 1000$ で実行したところ，$(X(10))^2 > 20$ を満たすものが 1000 個中 200 個だった. $(X(10))^2 > 20$ の母比率 p を，信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で区間推定しよう.
2. 標本サイズ $N = 100000$ で実行したところ，$(X(10))^2 > 20$ を満たすものが 100000 個中 20000 個だった. $(X(10))^2 > 20$ の母比率 p を，信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう.

略解

1. $\hat{p} = 0.2, \hat{p}(1-\hat{p}) = 0.16.$

$$0.2 - 1.960 \times \sqrt{\frac{0.16}{1000}} < p < 0.2 + 1.960 \times \sqrt{\frac{0.16}{1000}}$$

2. $\hat{p} = 0.2, \hat{p}(1-\hat{p}) = 0.16.$

$$0.2 - 2.576 \times \sqrt{\frac{0.16}{100000}} < p < 0.2 + 2.576 \times \sqrt{\frac{0.16}{100000}}$$

区間推定のアウトプット (例) $0.181 < p < 0.219$ (信頼係数 $0.95=$ $\boxed{}$).
次の主張は正しいとか正しくないとか言える?
有意水準 α(=1-信頼係数のこと) で,

- $p = 0.175$
- $p = 0.19$
- $p \neq 0.175$
- $p \neq 0.19$
- $p > 0.2$
- $p < 0.25$

統計的仮説検定の記述 (単純仮説)

言いたいことを先に示してそれを (有意水準 α) で「統計的に」証明するのが統計的仮説検定の書き方. 確率統計 I L12

$p \neq 0.18$ と言いいたい!

本当は言いたいこと → 対立仮説 H_1: $p \neq 0.18$.

1. 有意水準 $1 - \alpha = 0.05$ で,
2. 母比率の両側検定を行う
3. 帰無仮説 H_0 を, 「$p = p_0 = 0.18$ 」とする (背理法)
4. サイズ n の標本の, 標本比率を $\hat{p}$ とすると, 中心極限定理より, 量 $Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{1}{n}p_0(1-p_0)}}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう.
5. 標本に対して $Z = \frac{0.02}{\sqrt{\frac{1}{1000}0.18 \cdot 0.82}} = 1.65$
6. 正規分布表より, p 値 (これよりも極端なことが起きる確率) $P(|Z| > 1.65) = 0.0495 \times 2$ は $\alpha = 0.05$ よりも大きい. よって帰無仮説は棄却できない. 有意水準 $\alpha = 0.05$ では $p \neq 0.18$ とは結論できない.

統計的仮説検定の記述

$p > 0.18$ と言いたい!
本当は言いたいこと → 対立仮説 H_1: $p > 0.18$.

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で,
2. 母比率の片側検定を行う
3. 帰無仮説 H_0 を,「$p \le p_0 = 0.18$」とする (背理法)
4. サイズ n の標本の, 標本比率を $\hat{p}$ とすると, 中心極限定理より, 量 $Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{1}{n}p_0(1-p_0)}}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう.
5. 標本に対して $Z = \frac{0.02}{\sqrt{\frac{1}{1000}0.18 \cdot 0.82}} = 1.65$ 以上.
6. 正規分布表より, p 値 (これよりも極端なことが起きる確率) $P(Z > 1.65) = 0.0495 \times 1$ は $\alpha = 0.05$ よりも小さい. よって帰無仮説は棄却される. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で $p > 0.18$ と結論する.

注: 「p 値」は固有名詞

課題 p112=hyp1 予告

各チームは「数理情報学科学部生の過半数は○○である」という仮説を考え, 計算科学受講者全体を標本として調査して, 結果から検定を行います. 次の 2 つの条件を満たすチームを表彰します.

- 正しく検定していること
- 仮説が有意水準 $\alpha = 0.05$ で受理される (帰無仮説が棄却される) こと
- 標本比率 $\hat{p}$ がもっとも 0.5 に近いこと

つまり, なるべく, ぎりぎり棄却をねらってね. 「あなたは人間ですか?」とか反則.

L13-Q2

Quiz(母比率の仮説検定)

ある講義の受講者 (学科の学生から無作為に抽出されたと考える) $n = 60$ 名に, カモよりもペンギンが好きか? というアンケートを行ったところ, 40 名が「はい」と答えた.
「学科の学生の過半数はカモよりもペンギンが好きである」かどうか有意水準 $\alpha = 0.01$ で仮説検定しよう.

はっきりしたこと言うのに最低必要なサンプルサイズ

区間推定に戻ろう.

0.5 程度の母比率を, 信頼係数 0.95 で, 誤差 0.1 で推定するには, 標本サイズ n が $0.1 > 1.96 \times \sqrt{\frac{0.5\times(1-0.5)}{n}}$ を満たす必要.

$\rightsquigarrow \boxed{}$

0.5 程度の母比率を, 信頼係数 0.95 で, 誤差 0.01 で推定するには, 標本サイズ n が $0.01 > 1.96 \times \sqrt{\frac{0.5\times(1-0.5)}{n}}$ を満たす必要.

$\rightsquigarrow \boxed{}$

物理や計算科学では, n を大きくとってやり直すのは比較的簡単 $\to$ 誤差 $=$標本標準偏差$/\sqrt{n}$ くらいにしか思ってない

心理学, 生物学, 教育などでは n を大きくするのもやり直すのもたいへん

$\to$ ハイテクな統計学, 実験計画法が普及している

L13-Q3

Quiz(標本サイズと信頼区間)

選挙の出口調査で, 標本サイズ $n = 50$ で候補 A への投票率を推定したところ, $0.41 < p < 0.69$ となった. 当確を出す, すなわち, $0.5 < p$ であることを確信するには, 標本サイズはどのくらい必要か.

ここまで来たよ

1. 略解:ランダムウォークでモデルできる現象・サンプルパスの測定
2. 二人ウォーカー・母比率の検定・ランダムウォークで待ち行列
   - 2 人ウォーカー
   - 母比率の統計的仮説検定
   - ランダムウォークで待ち行列をモデル

窓口 1 個に行列 1 列

窓口が 1 個あり, 窓口で話をしている人+待っている人は 1 列に列を作る. t 分時点での列の長さを $X(t)$ 人とする. 1 分ごとに

1. 客が 1 人到達する確率 p
2. 客が 0 人到達する確率 $1-p$
3. 客が 2 人以上到達する確率 0

で客はランダムに到着し,

1. 仕事が 1 人終了する確率 q
2. 仕事が 0 人終了する確率 $1-q$
3. 仕事が 2 人以上到達する確率 0

で窓口での仕事はランダムに終了する

してよい質問．区間推定しろっ

- 時刻 t における列の長さの母平均値は?
- 列の長さが 0 である時間の比率は?
- $t < 60$ で列が 10 人以上になる確率は?
- $t \to +\infty$ で列はどんどん長くなっていく?

ランダムウォークでモデル

$$X(t+1) = \max(0, X(t) + R(t+1))$$

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} p(1-q) & (r = +1) \\ (1-p)(1-q) + pq & (r = 0) \\ (1-p)q & (r = -1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

待ち行列理論

個々のお客さんの待ち時間を気にするときは，ランダムウォークでなく，別の「ラグランジュ表現」をとることが多い

L13-Q4

Quiz(待ち行列)

窓口 1 個, 1 列の待ち行列を考える. 1 分ごとに

1. 客が 1 人到達する確率 0.2
2. 客が 0 人到達する確率 0.8
3. 客が 2 人以上到達する確率 0

でランダムに客が到着し,

1. 客が 1 人終了する確率 0.3
2. 客が 0 人終了する確率 0.7
3. 客が 2 人以上到達する確率 0

で窓口での仕事がランダムに終了する
時刻 $t = 0$ に列の長さが 0 だったとする. 時刻 $t = 1$ に列の長さが $0, 1$ である確率をそれぞれ求め, 列の長さの母期待値を求めよう.

お知らせ

Math ラウンジ=チューター月火水木昼. 2015-08-04 火までやってます.
スケジュール
2015-07-29 水 3 演習の真夏のプチテスト 35 ピーナッツ
2015-07-31 水 2 講義のファイナルトライアル (外部記憶ペーパー使用) 40 ピーナッツ 別紙出題計画参照.
e ラーニング予習問題 やってます.

manaba 出席カード提出
`https://attend.ryukoku.ac.jp`