ランダムウォークで待ち行列・パターン形成・課題解説

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆演習 II L14(2015-07-17 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-07-18 Sat 10:46 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークで待ち行列がモデルできることを説明できる
- ランダムウォークで DLA によるパターン形成がモデルできることを説明できる

http://hig3.net

L13-Q1

Quiz 解答:2 人ウォーカーのサンプルパスの測定

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	0	1	0	-1	-2	-3	-2	-1	0	-1
x_2	10	9	8	7	8	7	6	7	6	7

1. $t = 8$
2. $x_1 - x_2 = 6$
3. $1\ (t = 8)$

L13-Q2

Quiz 解答:母比率の仮説検定

本当は言いたいこと $\rightarrow$ 対立仮説 H_1: $p > 0.5$.

1. 有意水準 $\alpha = 0.01$ で,
2. 母比率の片側検定を行う
3. 帰無仮説 H_0 を,「$p \leq p_0 = 0.5$」とする (背理法)

4. サイズ n の標本の標本比率を $\hat{p}$ とすると，端の値の $p = p_0$ のとき，中心極限定理より，量 $Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{1}{n}p_0(1-p_0)}}$ は正規分布にしたがう．
5. 標本に対して $Z = \frac{0.17}{\sqrt{\frac{1}{60}0.5 \cdot 0.5}} = 2.63$ 以上．
6. 正規分布表より，p 値は $P(Z > 2.63) = 0.0043$ で $\alpha = 0.01$ よりも小さい．よって帰無仮説は棄却される．有意水準 $\alpha = 0.01$ で $p > 0.5$ と結論する．

講評

「学科の学生の過半数はカモよりもペンギンが好きである」の否定は，「学科の学生の過半数はカモよりもペンギンが好きである」わけではない，すなわち，「カモよりもペンギンが好きである学科の学生は半数以下である」，すなわち $p \leq 0.5$ です．

- 等号は一方だけにある必要があります．

- 「学科の学生の過半数はペンギンよりもカモが好きである」などと書き直してはいけませんし, そのような仮説は p の不等式では書けません.
  - アンケートが「ペンギンよりカモ」「カモよりペンギン」の 2 択だとはどこにも書いてません. 「同じくらい」とかあったかも. この検定は, そういう詳細に踏み込みません.
  - 仮に 2 択だったとしても, 同数だったときは?

ここまで来たよ

1. 略解:二人ウォーカー・母比率の検定・ランダムウォークで待ち行列

2. ランダムウォークで待ち行列・パターン形成・課題解説
   - 正規分布で近似できる場合できない場合
   - 逆関数法による連続型確率変数の乱数
   - ランダムウォークで待ち行列
   - 2 次元ランダムウォークとパターン形成 DLA モデル

正規分布で近似できる場合できない場合 — contrwnomal1, samplepath1 解説

できる contrwnormal1

$X(T) = X(0) + \sum_{t=1}^{T} R(t)$ なので, $X(T)$ は独立同分布の確率変数の和. よって, 中心極限定理より $T \to +\infty$ で $X(T)$ は近似的に正規分布にしたがう.

できない samplepath1

一方, samplepath1 にでてくる, $\max_t X(t)$ などは, 独立同分布の確率変数の和ではない. よって, 正規分布にしたがうとは限らない.

ここまで来たよ

1. 略解:二人ウォーカー・母比率の検定・ランダムウォークで待ち行列
2. ランダムウォークで待ち行列・パターン形成・課題解説
   - 正規分布で近似できる場合できない場合
   - 逆関数法による連続型確率変数の乱数
   - ランダムウォークで待ち行列
   - 2 次元ランダムウォークとパターン形成 DLA モデル

逆関数法による連続型確率変数の乱数 I

Quiz(逆関数法による擬似乱数生成)

次の確率密度関数を持つ連続値確率変数 R を考える.

$$f(r) = \begin{cases} -\frac{1}{6}r & (-2 \leq r < 0) \\ \frac{4}{3}r & (0 \leq r < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

Y が $[0,1)$ 一様乱数であるとき, $r = g(y)$ が上の確率密度関数に従うような $g(y)$ を逆関数法で求めよう.

これも逆関数法でできる I

Quiz(連続的な値をとる疑似乱数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 R を考える.

$$f(r) = \begin{cases} 4/3 & (1/4 \le r < 1/2) \\ 8/3 & (1/2 \le r < 3/4) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

R に対応する疑似乱数を返す関数 `double getrandom(double y)` を書こう.

ここまで来たよ

1. 略解:二人ウォーカー・母比率の検定・ランダムウォークで待ち行列
2. ランダムウォークで待ち行列・パターン形成・課題解説
   - 正規分布で近似できる場合できない場合
   - 逆関数法による連続型確率変数の乱数
   - ランダムウォークで待ち行列
   - 2 次元ランダムウォークとパターン形成 DLA モデル

窓口 1 個に行列 1 列

窓口が 1 個あり, 窓口で話をしている人+待っている人は 1 列に列を作る. t 分時点での列の長さを $X(t)$ 人とする. 1 分ごとに

1. 客が 1 人到達する確率 p
2. 客が 0 人到達する確率 $1-p$
3. 客が 2 人以上到達する確率 0

で客はランダムに到着し,

1. 仕事が 1 人終了する確率 q
2. 仕事が 0 人終了する確率 $1-q$
3. 仕事が 2 人以上到達する確率 0

で窓口での仕事はランダムに終了する

してよい質問. 区間推定しろっ

- 時刻 t における列の長さの母平均値は?
- 列の長さが 0 である時間の比率は?
- $t < 60$ で列が 10 人以上になる確率は?
- $t \to +\infty$ で列はどんどん長くなっていく?

ランダムウォークでモデル

$X(t+1) = \max(0, X(t) + R(t+1))$

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} p(1-q) & (r = +1) \\ (1-p)(1-q) + pq & (r = 0) \\ (1-p)q & (r = -1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

このモデルは, 確率変数の定義としてはいいけど, $X(t) = 0$ のときには現実を映していない…けど簡単のためにこれでやってみて.

待ち行列理論 個々のお客さんの待ち時間を気にするときは, ランダムウォークでなく, 別の「ラグランジュ表現」をとることが多い.

L14-Q1

Quiz(待ち行列)

窓口 1 個, 1 列の待ち行列を考える. 1 分ごとに

- 客が 1 人到達する確率 0.2
- 客が 0 人到達する確率 0.8
- 客が 2 人以上到達する確率 0

でランダムに客が到着し,

- 客が 1 人終了する確率 0.3
- 客が 0 人終了する確率 0.7
- 客が 2 人以上到達する確率 0

で窓口での仕事がランダムに終了する
時刻 $t=0$ に列の長さが 0 だったとする. 時刻 $t=1$ に列の長さが $0, 1$ である確率をそれぞれ求め, 列の長さの母期待値を求めよう.

ここまで来たよ

2 次元ランダムウォークとパターン形成 DLA モデル

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lichtenberg_figure_in_block_of_Plexiglas.jpg
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DLA_Cluster.JPG

2 次元ランダムウォーク

1 次元ランダムウォーク

```
x=0;
for(t){
  x+=getrandom(getuniform());
}
```

中身は

```
x=0;
for(t){
  z=getuniform();
  if(z<0.5){
    x+=1;
  } else {
    x-=1;
  }
}
```

2 次元ランダムウォーク

1 次元ランダムウォーク	x 軸上をランダムに移動	$X(t)$
2 次元ランダムウォーク	xy 平面上をランダムに移動	$(X(t), Y(t))$

```
x=0;y=0;
for(t){
  z=getuniform();
  if(z<0.25){
    x+=1;
  } else if(z<0.5)
    x-=1;
  } else if(z<0.75)
    y+=1;
  } else {
    y-=1;
  }
}
```

DLA=Diffusion Limit Aggregation 拡散律速凝集のルール

- 原点に枝の「種」を置く
- 粒子をランダムウォークさせる. 粒子が枝に接触したら, 固着して枝に転換する
- ランダムウォークをリセットして再スタート

https://www.youtube.com/watch?v=uBy3Uouy76Q

1 次元と 2 次元の中間の図形　応用数理 A

iOS アプリ by Daishin Ueyama

http://home.mims.meiji.ac.jp/~daishin/TheDLA/index-j.html

	テトリス	DLA
オイラー表現	積み上がるブロック	枝
ラグランジュ表現	落ち中のブロック	ランダムウォーカー
	横ランダム, 縦等速直線運動	縦横ランダム
	4 ブロック, 回転あり	1 ブロック, 回転なし

お知らせ

Math ラウンジ=チューター月火水木昼. 2015-08-04 火までやってます.
スケジュール
(個人別) 任意提出レポート 講義演習両方に最大 5 ピーナッツ (100 ピーナッツ以外に)
2015-07-29 水 3 演習の真夏のプチテスト 35 ピーナッツ
2015-07-31 金 2 講義のファイナルトライアル (外部記憶ペーパー使用) 40 ピーナッツ 出題計画は 2015-07-22 水に.
e ラーニング予習問題 やってます.

manaba 出席カード提出
`https://attend.ryukoku.ac.jp`