計算科学[1]テストプチ

龍谷大学理工学部数理情報学科 2002 年 11 月 20 日樋口さぶろお[2]

すべて過程も記そう.

1

以下で指定される乱数を返す関数を C 言語で書こう. なお, $[0,1)$ 一様乱数を返す関数 `double get_uniform_random(void)` は与えられたものとして使ってよい. 乱数の seed のことは気にしなくてよい.

1. 確率密度関数

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x}} & (1 \leq x < 9) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{1}$$

連続な値をとる確率変数 X がある. この確率密度関数にしたがう乱数を返す関数 `double random1(void)`. なぜその関数でよいのかが明らかになるような, 数学的な計算過程も書こう.

2. 離散的な値 1,2,3 のみを, 確率

$$p(x) = \begin{cases} 1/3 & (x = 1) \\ 1/3 & (x = 2) \\ 1/3 & (x = 3) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{2}$$

にしたがってとる確率変数 X がある. この確率にしたがう乱数を返す関数 `int random2(void)`. **この問は過程の記述不要.**

2

連続な値をとる確率変数 X が, 確率密度関数

$$p(x) = \begin{cases} +\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} & (-2 \leq x < 0) \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} & (0 \leq x < 2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{3}$$

にしたがうとする.

1. X の分散 $V(X)$ を求めよう.

2. $-1 \leq x < +1$ である確率を求めよう.

[1] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/compsci/

[2] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

3

量 $P(x,t)$ に対する漸化式

$$P(x,t+1)=\frac{1}{3}P(x+1,t)+\frac{2}{3}P(x,t) \tag{4}$$

を, 初期条件

$$P(x,0)=\delta_{x,0}=\begin{cases}1 & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases} \tag{5}$$

のもとで考える. ただし, x,t は整数, $P(x,t)$ は実数の値をとる.

1. 生成関数 $Z(s,t)$ を

   $$Z(s,t)=\sum_{x=-\infty}^{+\infty}s^xP(x,t) \tag{6}$$

   で定義する. 式 (4) を, $Z(s,t)$ についての式に書き直そう ($s, Z(s,t), Z(s,t+1)$ は含んでもいいけど, $x, P(x,t)$ は含まない式に書き直そう).

2. 上で得た式と (5) を用いて,

   $$Z(s,t)=\left(\frac{1}{3s}+\frac{2}{3}\right)^t \tag{7}$$

   であることを示そう.

3. (7) を利用して, 量

   $$\sum_{x=-\infty}^{+\infty}x\cdot P(x,t) \tag{8}$$

   を t の関数として求めよう.

計算科学[3]テストプチ略解

龍谷大学理工学部数理情報学科 2002 年 11 月 20 日樋口さぶろお[4]

1

累積分布関数 $F(x)$ は, $1 \leq x < 9$ のとき,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \sqrt{1}\right).$$

$y = F(x)$ の逆関数 $F^{-1}(y)$ を求めると, $F^{-1}(y) = (2y+1)^2$.

プログラム例 1

```
double random1(void){
  double x;
  double y=get_unform_random();
  x=2.0*y+1.0;
  x=x*x;
  return x;
}
```

プログラム例 2

```
int random2(void){
  double r=get_unform_random();
  if( r < 1.0/3.0 ){
    return 1;
  } else if ( r < 2.0/3.0 ){
    return 2;
  } else {
    return 3;
  }
}
```

2

1. $p(x), x^2 \cdot p(x)$ は偶関数, $x \cdot p(x)$ は奇関数なので,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)\mathrm{d}x = 0.$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x)\mathrm{d}x - 0^2 = 2\int_{0}^{2} x^2(-\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2})\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}.$$

2. 確率 $= \int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})\mathrm{d}x = \frac{3}{4}$

3

1. $Z(s, t+1) = \frac{1}{3s}Z(s,t) + \frac{2}{3}Z(s,t) = \left(\frac{1}{3s} + \frac{2}{3}\right)Z(s,t)$

2. $Z(s,0) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} s^x P(x,0) = 1$ より, $Z(s,t)$ は s に関して, 初項 1, 公比 $\frac{1}{3s} + \frac{2}{3}$ の等比級数. よって示せる.

3.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot P(x,t)\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial \alpha} Z(\mathrm{e}^{\alpha}, t)\Big|_{\alpha=0} = -\frac{t}{3}. \tag{9}$$

[3]http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/compsci/

[4]mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, へや 1-508, でんわ 077-543-7501