計算科学☆実習 B 初夏のプチテスト (筆記)

樋口さぶろお[1] 配布: 2017-06-06 Wed 更新: Time-stamp: ”2017-07-31 Mon 07:14 JST hig”

初夏のプチテスト (筆記) 参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

過程不要

時刻, 座標がともに整数値をとるランダムウォークを考える. 時刻 t に座標 x にウォーカーがいる確率を $p(x,t)$ とする.

時刻 t における座標 $X(t)$ を, 次で定める.

$$X(t+1) = X(t) + R(t+1), \qquad X(2) = 9.$$

ただし, $R(t)$ は独立同分布

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} 1/8 & (r = +2) \\ 3/8 & (r = 0) \\ 5/8 & (r = -1) \\ 0 & (他 \end{cases}$$

にしたがう確率変数である.

1. $p(x,t)$ のしたがう漸化式と初期条件を書こう.
2. $p(8,3)$ を求めよう.

[1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

2

$\boxed{\textbf{過程不要}}$

吸収壁のあるランダムウォークを, 状態空間 $S=\{x\}=\{0,1,2,3,4\}$ 上のマルコフ過程として考える.

壁 $x=0,4$ は吸収壁であり, いったん $x=0,4$ に到達した粒子は, その後はまったく移動しない.

壁 $x=0,4$ 以外では, ウォーカーは各時刻に,

- x から $x+1$ に移動する確率が $1/9$,
- x から $x-1$ に移動する確率が $2/9$,
- 移動しない確率が $6/9$

というルールに従って移動する.

1. 推移図を書こう.
2. 転置推移確率行列 M を書こう.

3

次の転置推移確率行列 M をもつ, 状態空間 $S=\{0,1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 時刻 t の分布を $\vec{p}(t)$ とする. $M=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{3}{4}&\frac{5}{6}\end{pmatrix}$ とする. ただし, M の固有値は $\lambda=1,\frac{1}{12}$, 対応する固有ベクトルは $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}s,\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}s$ $(s\neq 0)$ であることを使ってよい.

1. マルコフ連鎖に定常分布があれば, すべて答えよう.
2. $\vec{p}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ のとき, $\vec{p}(t)$ $(t\geq 0)$ を求めよう.

4

次の転置推移確率行列 M をもつ, 状態空間 $S=\{0,1,2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

ただし, M の固有値は $\lambda=1,1,-1$, 対応する固有ベクトルは $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}s,\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}s,\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}s$ $(s\neq 0)$ であることを使ってよい.

1. $\vec{p}(0)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ のとき, 極限分布 $\lim\limits_{t\to+\infty}\vec{p}(t)$ はあるか? あるなら求めよう.
2. $\vec{p}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ のとき, 極限分布 $\lim\limits_{t\to+\infty}\vec{p}(t)$ はあるか? あるなら求めよう.

5

時刻 t におけるランダムウォーカーの座標 $X(t)$ を, 次の漸化式で定める $(t=0,1,2,\ldots)$.

$$X(t+1)=X(t)+R(t+1), \quad \text{(初期条件は別に指定)}.$$

確率変数 $R(t)$ $(t=1,2,3,\ldots)$ は, 独立同分布に従い,

- 確率 $2/5$ で $R(t)=1$,
- 確率 $3/5$ で $R(t)=0$.

の値をとる.

1. 時刻 $t=0$ に $x=0$ から出発するとき, $t=10$ に $x=6$ にいる確率 (母比率) $P(X(10)=6)$, $\mathrm{E}[X(10)], \mathrm{V}[X(10)]$ を求めよう.
2. 時刻 $t=3$ に $x=2$ から出発するとき, $t=10$ に $x=6$ にいる確率 (母比率) $P(X(10)=6)$, $\mathrm{E}[X(10)], \mathrm{V}[X(10)]$ を求めよう.

巾乗や階乗を計算したり約分したり整理したりしなくてよいが, 二項係数や組合せの数 $\binom{n}{m}, {}_n\mathrm{C}_k$ は階乗に直すこと.

6

$S=\{0,1,\ldots,5\}$ 上のランダムウォークを考える. マルコフ連鎖の転置推移確率行列は,

$$M=\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

で与えられる.

このランダムウォークの移動のルールを「x にいるウォーカーは次の時刻には…(移動のルール)…に移動する. 端の外にジャンプしようとするウォーカーは…(境界条件)…となる」のように日本語で説明しよう.

7

時刻と座標を

```
int t,x;
```

とする. 時刻 $t=0$ に $x=0$ を出発するランダムウォーカーを, 各時刻に次のように動かす.

```
x=x+getrandom(getuniform());
```

ここで,

```
double getuniform(){ /* [0,1)一様乱数を返す*/
    /*略*/
}

int getrandom(double y){ /* 乱数生成 */
  if(y<0.2){
    return -1;
  } else if(y<0.7){
    return 0;
  } else {
    return +1;
  }
}
```

である.

1. 時刻 $t=1$ のウォーカーの座標 x の母分散を求めよう.
2. 時刻 $t=2$ に, ウォーカーが $x=0$ にいる確率を求めよう.

8

t を時間, x を位置とする. 偏微分方程式 (と初期値条件 境界条件)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) =& 3\times\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (0<x<2\pi)\\ u(x,0) =& \sin(2x) \qquad (0<x<2\pi)\\ u(0,t) =& u(2\pi,t)=0 \qquad (t\geq 0)\end{aligned}$$

を考える.

これらすべてを満たす解の候補として $u(x,t)=\mathrm{e}^{-75t}\sin(5x)$ を考えてみた.

1. $u(x,t)$ は偏微分方程式を満たすかどうか, 理由とともに答えよう.
2. $u(x,t)$ は初期条件を満たすかどうか, 理由とともに答えよう.
3. $u(x,t)$ は境界条件を満たすかどうか, 理由とともに答えよう.

9

次のプログラムで, seed を無作為に入力する.

```c
double getuniform(){
  /* 略. rand() を定数倍して[0,1)一様乱数を返す. 授業と同じもの */
}

int getrandom(double y){
  if( y<1/7.0 ){
    return 0;
  }else if( y<3/7.0 ){
    return 1;
  }else{
    return 2;
  }
}

int main(){
  int seed;
  int x,y;
  scanf("%d",&seed);
  srand(seed);
  x=getrandom(getuniform());
  if( x==getrandom(getuniform()) ){
    printf("A\n");
  }
  srand(seed);
  y=getrandom(getuniform());
  if( x==y ){
    printf("B\n");
  }
  return 0;
}
```

1. A が出力される (B はどうでもいい) 確率を理由とともに答えよう
2. B が出力される (A はどうでもいい) 確率を理由とともに答えよう

10

過程不要

次のプログラムは, $t=0$ に $x=3$ を出発するランダムウォークが, ランダムウォークで, $0 \le t \le$ `tmax` に, いちども $x=4$ を訪れない母比率 p を推定するためのものである.

空欄 A–E を埋めよう. A–D は 1 行で. E は複数行も可.

```
/* include など略 */
#define TMAX 100

double getuniform();      /* 下では定義省略  */
int getrandom(double y); /* 下では定義省略  */
int w(int path[],int tend);

int main(){
  int t,tmax,  n,nmax, x, seed;
  int path[TMAX];
  int count=0;
  double p;

  scanf("%d",&seed);
  scanf("%d",&tmax);
  scanf("%d",&nmax);
  printf("#d=%d\n#T=%d\n#N=%d\n",seed,tmax,nmax);

  [A];
  for(n=0;n<nmax;n++){
    [B];
    path[0]=x;
    for([C]){
      x=x+getrandom(getuniform());
      path[t]=x;
    }
    count+=w(path,tmax);
  }
  p=[D];
  printf("*p=%f\n",p);
  return 0;
}

/* path[0],path[1],..,path[tend] が
いちども x=4 を訪れないなら1, そうでないなら0を返す. */
int w(int path[], int tend){
  int t;
  [E]
}
```

計算科学☆実習 B 初夏のプチテスト (筆記) 略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2017-06-06 Wed 更新: Time-stamp: "2017-07-31 Mon 07:14 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. プチテストで, 受講者はすべての過程を記す必要があります.

配点 1,3,4,6,10:各 10 点,2,7,9:各 8 点,5:20 点,8:6 点. 計 100 点.

1

1.

$$p(x,t+1) = \frac{1}{8}\times p(x-2,t) + \frac{3}{8}\times p(x,t) + \frac{5}{8}\times p(x+1,t), \quad p(x,9) = \begin{cases} 1 & (x=2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

2. $p(8,3) = \frac{1}{8}p(6,2) + \frac{3}{8}p(8,2) + \frac{5}{8}p(9,2) = \frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot 0 + \frac{5}{8}\cdot 1 = \frac{5}{8}$.

配点 1:漸化式 4 点, 初期条件 3 点, 2:3 点

講評 ここでいう漸化式は t に関する漸化式なので, $t+1$ を t に関係づけなくてはいけません. 両辺が同じ t という式は NG アンサーですね.

2 を二項分布の公式でなんとかしようとした人もいましたが, 飛ぶ先が 3 箇所ある時点で, 二項分布では無理です.

2

1. 略
2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/9 & 2/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 6/9 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 6/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}$$

配点 1:2 点, 2:6 点, 計 10 点.

講評 転置推移確率行列を正解しているのに推移図が正しく描けていない人がいましたが, 行列から変換して求めるか検算するかしてね.

授業では $x=0$ 側の吸収壁やりましたけど, 仕組みがわかっていれば $x=m-1$ 側も同じですよね.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

1. 固有値 1 の固有ベクトルを定数倍して確率ベクトルにしたものなので, $\frac{1}{11}\left(\begin{smallmatrix}2\\9\end{smallmatrix}\right)$.
2.
$$\vec{p}(t)=a_1\cdot\left(\begin{smallmatrix}2\\9\end{smallmatrix}\right)1^t+a_2\cdot\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\left(\tfrac{1}{12}\right)^t$$
である. $\vec{p}(0)=\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ より, $a_1=\frac{1}{11},a_2=-\frac{2}{11}$.
よって,
$$\vec{p}(t)=\tfrac{1}{11}\left(\begin{smallmatrix}2\\9\end{smallmatrix}\right)+\tfrac{2}{11}\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)\left(\tfrac{1}{12}\right)^t$$

配点　1:3 点,2:7 点, 計 10 点.

4

1. この $\vec{p}(0)$ は固有値 1 の固有ベクトルである. よって, $\vec{p}(1)=M\vec{p}(0)=\vec{p}(0)$. 同様に $\vec{p}(t)=M^t\vec{p}(0)=\vec{p}(0)$. よって, 極限分布は存在し, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\vec{p}(0)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.
直接に
$$\vec{p}(t)=a_1\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\end{smallmatrix}\right)1^t+a_2\left(\begin{smallmatrix}0&1&1\end{smallmatrix}\right)1^t+a_3\left(\begin{smallmatrix}0&1&1\end{smallmatrix}\right)(-1)^t$$
の係数を $a_1=\frac{1}{2},a_2=\frac{1}{4},a_3=0$ と決めることによっても同じ結論を得る.
2. $\vec{p}(1)=M\vec{p}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
$\vec{p}(2)=M\vec{p}(1)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{p}(0)$ より,
$$\vec{p}(t)=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\+1\\-1\end{pmatrix}(-1)^t$$
と振動し, 極限分布は存在しない.
直接に
$$\vec{p}(t)=a_1\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\end{smallmatrix}\right)1^t+a_2\left(\begin{smallmatrix}0&1&1\end{smallmatrix}\right)1^t+a_3\left(\begin{smallmatrix}0&1&1\end{smallmatrix}\right)(-1)^t$$
の係数を $a_1=0,a_2=\frac{1}{2},a_3=-\frac{1}{2}$ と決めることによっても同じ結論を得る.

配点　1,2:理由と結論:5 点, $\vec{p}(t)$ の式だけなら 3 点.

講評　ある/ない, ∞, 極限, などの言葉がないものは, 結論が書いてあるとは見なしませんでした.

実は, 既約でなくしかも周期的な場合.

白紙や過程なしの人も多かったですが, 1 個前の問のように, 力まかせに $\vec{p}(t)$ を決定するば, 数学 III 的な「収束」の定義さえわかっていれば答えられます.

言われてなくても推移図を描いて考えた人はすばらしい. でも過程の書き方には注意.

収束するなら第 1 固有ベクトルに行くから $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\end{smallmatrix}\right)$ に行くと思った人ちょっと待った. 固有値 1 が重根だから, 最初の 2 個の固有ベクトルの間は差別できません. $\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&2&2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1&-1\end{smallmatrix}\right)$ って表示してもよかったんだよ. 固有値 1 に対応する固有空間を気にすること.

5

1. $X(10)$ は二項分布 $\mathrm{B}(10, \frac{2}{5})$ にしたがう. $P(X(10)=6) = \frac{10!}{6!4!}(\frac{2}{5})^6(\frac{3}{5})^4$. $\mathrm{E}[X(10)] = 10 \cdot \frac{2}{5}, \mathrm{V}[X(10)] = 10 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$.
2. 時間 7 の間に 4 だけ進めばよい. $P(X(10)=6) = \frac{7!}{4!3!}(\frac{2}{5})^4(\frac{3}{5})^3$. $\mathrm{E}[X(10)] = 7 \cdot \frac{2}{5} + 2, \mathrm{V}[X(10)] = 7 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$.

配点　1,2: 確率 4 点, 母平均値 3 点, 母分散 3 点, 計 20 点.

6

時刻 t に x にいるウォーカーは, 時刻 $t+1$ には, 確率 $\frac{4}{7}$ で $x+1$ に移動確率 $\frac{2}{7}$ で $x-1$ に移動確率 $\frac{1}{7}$ で x にとどまる.

ただし, $x=-1$ に移動しようとするウォーカーは $x=4$ に, $x=5$ に移動しようとするウォーカーは $x=0$ に移動する.

配点　計 10 点.

7

$t\backslash x$	-2	-1	0	$+1$	$+2$
0	0	0	1.0	0	0
1	0	0.2	0.5	0.3	0
2	0.2· 0.2	略	0.2·0.3+0.5·0.5+0.3·0.2	略	0.3·0.3

1. $\mathrm{E}[X(0)] = -1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.3 = 0.1$. $\mathrm{E}[X(1)^2] = (-1)^2 \cdot 0.2 + 0^2 \cdot 0.5 + 1^2 \cdot 0.3 = 0.5$. $\mathrm{V}[X(1)] = \mathrm{E}[X(1)^2] - \mathrm{E}[X(1)]^2 = 0.49$.
2. 表から $P(X(2)=0) = 0.37$.

配点　1,2:各 4 点, 計 8 点.

講評　行き先が 3 か所あるようなランダムウォークでは, 確率は二項分布ではすみません. 漸化式を繰りかえし適用していくしかないでしょう. t が大きければ正規近似も使えますが.

8

1. 満たす
2. 満たさない
3. 満たす

配点　1,2,3:各 2 点, 計 6 点.

9

1. 2回続けて同じ値が出る確率なので, $(1/7)^2 + (2/7)^2 + (4/7)^2 = \frac{21}{49}$.
2. 同一の seed で srand した直後には, rand は一定の値を返すので, 確率は 1.

配点　1,2 各 4 点, 計 10 点.

講評　乱数表とヘッドの比喩で, rand の振る舞いを説明できるようになろう.

10

A srand(seed)
B x=0
C `t=1;t<=tmax;t++`
D (double)count/nmax
E `for(t=0;t<=tend;t++){ if(path[t]==4){ return 0;} } return 1;`

配点　1,2,3,4,5 各 2 点, 計 10 点.

講評　3 では, tmax って書いた人が一定数いたけど, 関数内では仮引数とローカル変数しか使えない (グローバル変数がないなら), 意味を考える前に使える変数を限定しておかないと.

5 は ∀ や ∃ のプログラミング. 決まったパターンなのでできるようになろう.