数理モデル基礎後期末試験[1]

龍谷大学理工学部数理情報学科 2002 年 1 月 23 日樋口さぶろお[2]

答えの根拠がわかるように過程を記せ.

問 1

次の微分方程式の一般解を, それぞれ求めよ.

$$x''(t)+3x'(t)+2x(t)=2t. \tag{1}$$

$$x'(t)+x(t)=3\cos t+\sin t. \tag{2}$$

問 2

次の微分方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -x_1(t)+x_2(t) \\ (x_1(t)^2-1)\cdot(x_2(t)-2) \end{pmatrix} \tag{3}$$

1. 平衡点をすべて求めよ.
2. Jacobi 行列の値を各平衡点上で求めよ.
3. 線型近似を用いて, 各平衡点の型と (漸近) 安定性を判定せよ. (線型近似した問題の解は必ずしも求めなくてよい)

問 3

周期 $T=2\pi$ の関数

$$f(t)=\sin^3 t \tag{4}$$

を考える.

1. 関数 $f(t)$ の Fourier 級数展開を

   $$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \mathrm{e}^{int} \tag{5}$$

   としたときの係数 f_n を求めよ.
2. 微分方程式

   $$x''(t)+2x(t)=f(t) \tag{6}$$

   の特解を $x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \mathrm{e}^{int}$ とおいて, x_n を決定せよ.
3. 特解 $x(t)$ を $\sin nt, \cos nt$ の和として書け (答えの中の e^{int} をすべて $\sin nt, \cos nt$ で書き直して整理せよ).

[1] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/mathmodel/

[2] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

問 4

微分方程式

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1(t) \cdot (2x_1(t) + 2x_2(t) - 3) \\ x_2(t) \cdot (2x_1(t) + 2x_2(t) - 2) \end{pmatrix} \tag{7}$$

の平衡点と, その周りの線型近似の結果は, 次のようである.

平衡点 (x_1, x_2)	固有値 λ_1	固有ベクトル $\vec{v}_1$	固有値 λ_2	固有ベクトル $\vec{v}_2$
$(0,0)$	-3	$\binom{1}{0}$	-2	$\binom{0}{1}$
$(0,1)$	-1	$\binom{1}{-2/3} = \binom{1}{-0.67}$	2	$\binom{0}{1}$
$(\frac{3}{2},0)$	3	$\binom{1}{0}$	1	$\binom{1}{-2/3} = \binom{1}{-0.67}$

例のように $x_1, x_2 \geq 0$ の大きな図を 2 つかき, ひとつに 1,2,3 の答えを, もうひとつに 4 の答えを記せ.

なお, 線型近似した問題の解の具体的な式は求めなくてよい.

1. $x_1, x_2 \geq 0$ で, ヌルクラインを点線で描け.
2. 各平衡点の近くでの解軌道の様子を実線で描け. 各平衡点の型を記せ.
3. 上の 2 つの情報から, $x_1, x_2 \geq 0$ 全体での解軌道の様子を実線で描け.
4. $t \to \infty$ で, 平衡点 $(0, 0)$, に近づくためには初期値 $(x_1(0), x_2(0))$ は, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ のうち, どの部分に属していればよいか. 斜線で図示せよ.

上の図は描きかたの例であり, 上の微分方程式とは関係ない.

数理モデル基礎後期末試験[3]

龍谷大学理工学部数理情報学科 2002 年 1 月 23 日樋口さぶろお[4]

略解

問 1

特解は, それぞれ $x(t) = At + B, x(t) = A\cos t + B\sin t$ などとおいて求めればよい.

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} + t - \frac{3}{2}. \tag{8}$$

$$x(t) = C\mathrm{e}^{-t} + \cos t + 2\sin t. \tag{9}$$

C_1, C_2, C は積分定数.

問 2

1. 平衡点は, $-x_1 + x_2 = 0$ かつ $(x_1^2 - 1)\cdot(x_2 - 2) = 0$ から求まり, $(x_1, x_2) = (1, 1), (-1, -1), (2, 2)$.

2. Jacobi 行列は

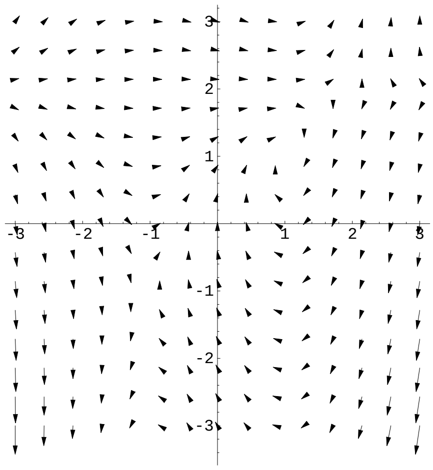
$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2x_1(x_2 - 2) & x_1^2 - 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

なので, 各平衡点上では,

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad J(-1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad J(2,2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

3. これらの行列の固有値 λ を求めると,

平衡点	固有値	型と安定性
$(1,1)$	$\lambda = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-7})$	渦状点. (漸近) 安定.
$(-1,-1)$	$\lambda = 2, -3$	鞍状点. 不安定.
$(2,2)$	$\lambda = -1, 3$	鞍状点. 不安定.



となる (図は参考).

[3] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/mathmodel/

[4] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

問 3

1.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{(2i)^3} (\delta_{3-n,0} - 3\delta_{1-n,0} + 3\delta_{-1-n,0} - \delta_{-3-n,0}). \quad (12)$$

2.

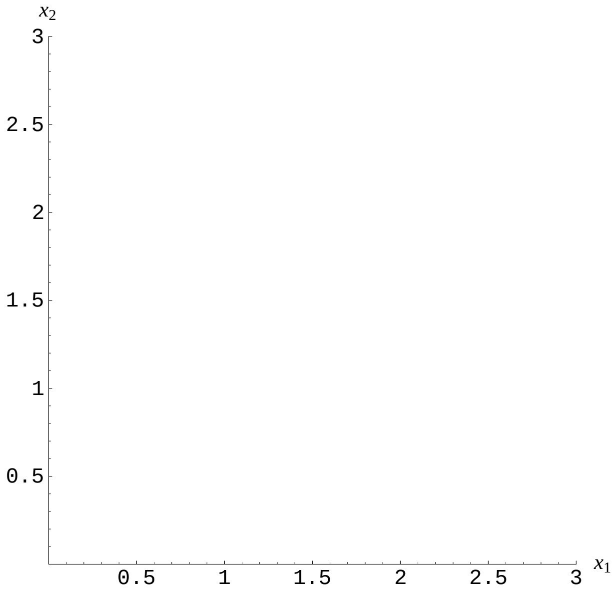
$$x_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{8i} \begin{cases} \pm\frac{1}{7} & (n = \pm 3) \\ \pm 3 & (n = \pm 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (13)$$

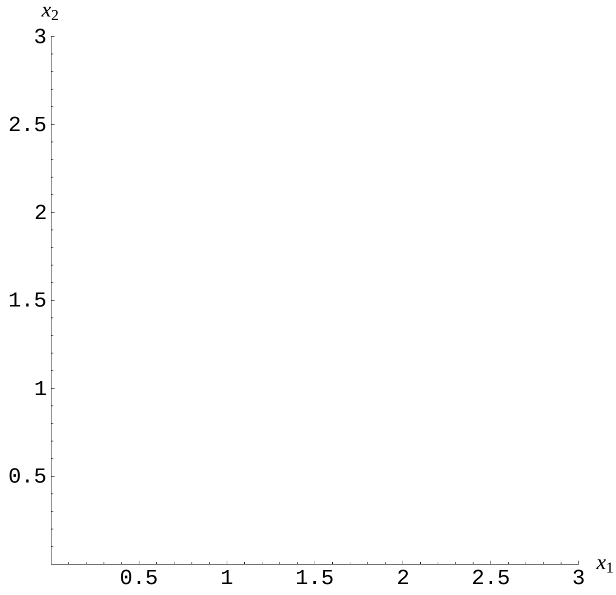
3. Euler の公式を使って,

$$x(t) = \tfrac{1}{28} \sin 3t + \tfrac{3}{4} \sin t \quad (14)$$

は特解.

問 4





お知らせ

- 答案は返却しません.
- 得点はメイルでお知らせします.
- メイルでお伝えした情報と, 過去に受けとった答案の点数とが一致しないなど, もしも集計上の誤りと思われる点があれば遠慮なく申し出てください.

訂正

問 3

1.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} \mathrm{d}t = \overset{\sqrt{2\pi}}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}} \frac{1}{(2i)^3} (\delta_{3,n} - 3\delta_{1,n} + 3\delta_{-1,n} - \delta_{-3,n}). \quad (12)$$

2.

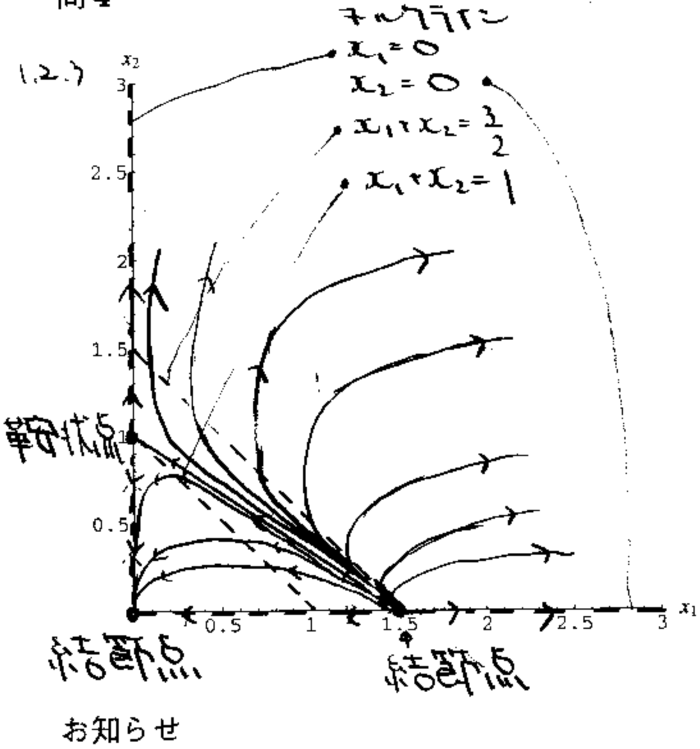
$$x_n = \frac{\overset{\sqrt{2\pi}}{\cancel{1}}}{8i} \begin{cases} \pm\frac{1}{7} & (n = \pm 3) \\ \pm 3 & (n = \pm 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (13)$$

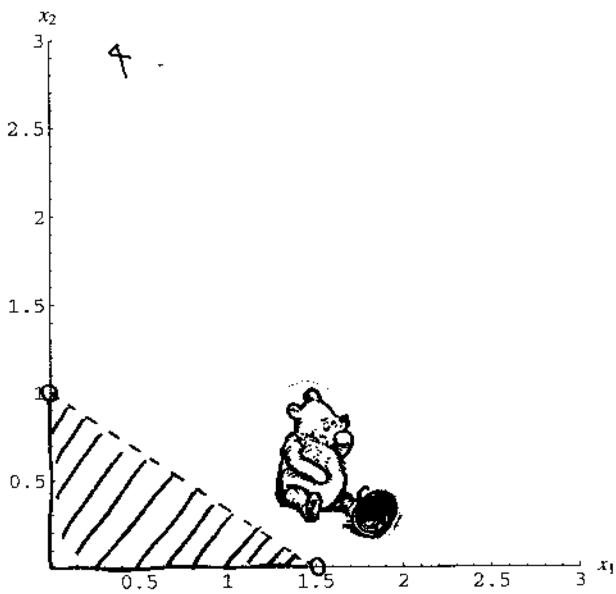
3. Euler の公式を使って,

$$x(t) = \tfrac{1}{28} \sin 3t + \tfrac{3}{4} \sin t \quad (14)$$

は特解.

問 4





お知らせ

- 答案は返却しません.
- 得点はメイルでお知らせします.
- メイルでお伝えした情報と, 過去に受けとった答案の点数とが一致しないなど, もしも集計上の誤りと思われる点があれば遠慮なく申し出てください.