数理モデル基礎/演習[1] 龍谷大学理工学部数理情報学科 2001年11月28日 樋口さぶろお[2]

24 自励系の大域解

24.1 自励系の解軌道

微分方程式

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -x_1(t) - 4x_2(t)^3 \\ 4x_1(t)^3 + x_2(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

を考える.

1. 積分して, 解軌道を $f(x_1, x_2) = 0$ の形に求めよ.
2. 平衡点のまわりの線型近似, ヌルクラインを利用し, 解軌道を描け.

24.2 自励系の平衡点の安定性

微分方程式

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} +x_1(t)^3 \\ -x_2(t) \cdot (1 + x_1(t)^2) \end{pmatrix} \tag{2}$$

を考える.

1. 平衡点 $(0, 0)$ のまわりで線型近似を行なえ.
2. 自励系 (2) を積分して, $x_1(t), x_2(t)$ を求めよ.

Hint. 解軌道を, $x_2 = f(x_1)$ の形に求める. また, $x_1(t)$ は簡単に求まる (変数分離形).

3. 自励系 (2) の平衡点 $(0, 0)$ は安定か.

24.3 自励系としての減衰振動子

次の抵抗のある振動子 $x(t)$ の方程式を考える ($m, \gamma, \omega > 0$, 定数)

$$mx''(t) + m\gamma x(t) + m\omega^2 x(t) = 0. \tag{3}$$

1. (3) の特性方程式を調べて,

$\gamma = 0$	調和振動
$0 < \gamma < 2\omega$	減衰振動
$\gamma = 2\omega$	臨界制動
$2\omega < \gamma$	過減衰

となることを思い出し, それぞれの $x(t)$ のグラフの雰囲気を再現せよ.

[1] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/mathmodel/

[2] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

2. $v(t) = x'(t)$ とおいて, (3) 一階の連立微分方程式に書き直せ.

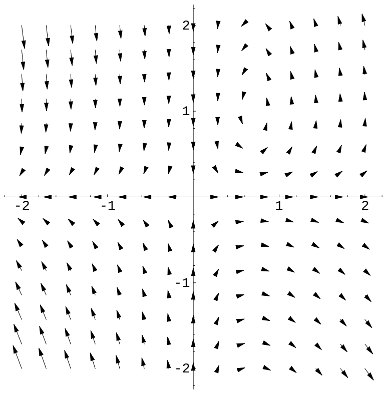
3. 上のそれぞれの場合に, 一階の連立微分方程式の平衡点 $(0,0)$ の型と安定性を調べよ.

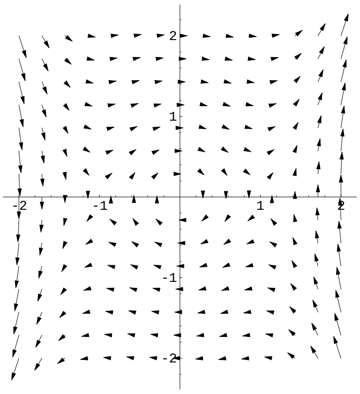
22　略解

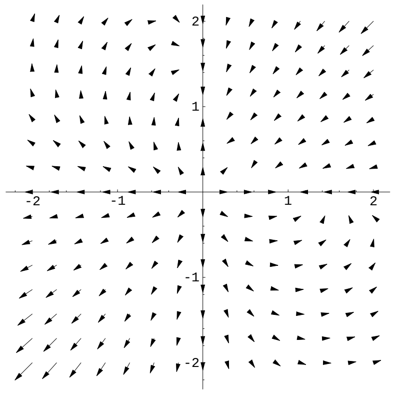
1. $(0,0)$ 鞍状点, 不安定. $(2/3,1)$ 反時計回り渦心点, 安定.

2. $(0,0)$ 時計まわり渦心点, 安定. $(\pm 1,0)$ 鞍状点, 不安定.

3. $(0,0)$ 結節点, 不安定. $(1,0),(0,1)$ (変則的) 結節点, (漸近) 安定. $(1/3,1/3)$ 鞍状点, 不安定.





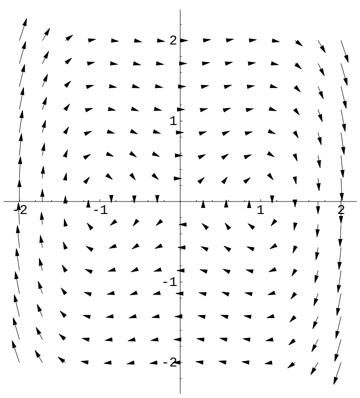


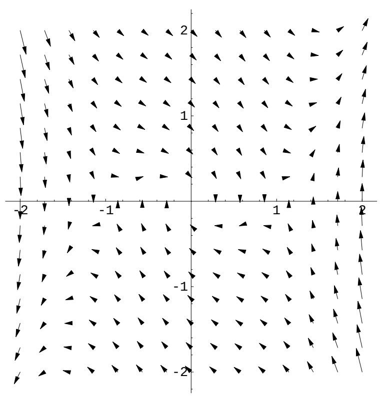
23　略解

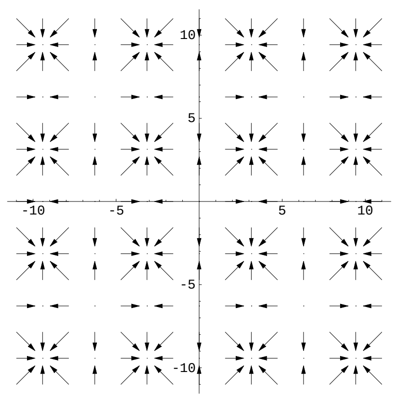
1. $(\pm 1,0)$ 時計回り渦心点, 安定, $(0,0)$ 鞍点, 不安定.

2. $(\pm 1,0)$ 鞍点, 不安定. $(0,0)$ 時計回り渦状点, 漸近安定.

3. $(n\pi, m\pi)$, $n,m \in \mathbb{Z}$. (n,m)=(奇, 奇) のとき 結節点, 漸近安定. (n,m)=(偶, 偶) のとき 結節点, 不安定. (n,m)=(偶, 奇),(奇, 偶) のとき 鞍状点, 不安定.







2. $v(t) = x'(t)$ とおいて, (3) 一階の連立微分方程式に書き直せ.

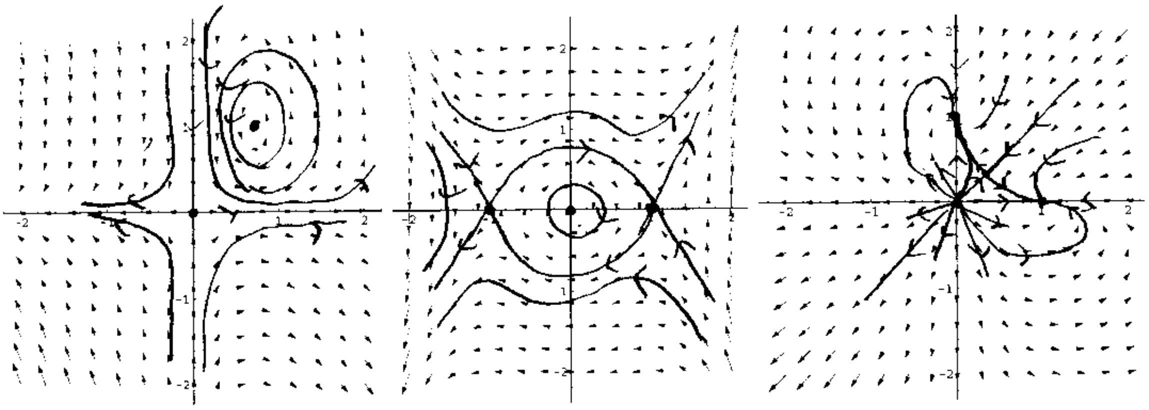
3. 上のそれぞれの場合に, 一階の連立微分方程式の平衡点 $(0,0)$ の型と安定性を調べよ.

22 略解

1. $(0,0)$ 鞍状点, 不安定. $(2/3,1)$ 反時計回り渦心点, 安定.

2. $(0,0)$ 時計まわり渦心点, 安定. $(\pm 1,0)$ 鞍状点, 不安定.

3. $(0,0)$ 結節点, 不安定. $(1,0),(0,1)$ (変則的) 結節点, (漸近) 安定. $(1/3,1/3)$ 鞍状点, 不安定.



23 略解

1. $(\pm 1,0)$ 時計回り渦心点, 安定, $(0,0)$ 鞍点, 不安定.

2. $(\pm 1,0)$ 鞍点, 不安定. $(0,0)$ 時計回り渦状点, 漸近安定.

3. $(n\pi, m\pi)$, $n,m \in \mathbb{Z}$. (n,m)=(奇, 奇) のとき 結節点, 漸近安定. (n,m)=(偶, 偶) のとき 結節点, 不安定. (n,m)=(偶, 奇),(奇, 偶) のとき 鞍状点, 不安定.