数理モデル基礎/演習[1] 龍谷大学理工学部数理情報学科2002年1月9日樋口さぶろお[2]

28 Fourier 級数展開を利用した微分方程式の解法

微分方程式

$$x''(t)+\omega^2x(t)=f(t) \tag{1}$$

の特解 $x(t)$ を, Fourier 級数の形に求めよ. ただし, $\omega>0$ は整数でない定数. $f(t)$ は周期 $T=2\pi$ の周期関数で,

$$f(t)=\begin{cases}+1 & (0\le t<\pi)\\ -1 & (\pi\le t<2\pi)\end{cases} \tag{2}$$

$$f(t)=\cos^3(t)\quad (0\le t<2\pi) \tag{3}$$

$$f(t)=t\quad (0\le t<2\pi). \tag{4}$$

$$f(t)=|t|\quad (-\pi\le t<\pi). \tag{5}$$

ただし, 基本周期の定義だけが示されている (すなわち, 周期 2π となるように拡張する).

略解

27.1 Fourier 級数変換

(3) $n=0$ のときを特別扱いすることに注意すると,

$$f_n=\begin{cases}0 & (n:\text{偶数})\\ \frac{4}{\sqrt{2\pi}ni} & (n:\text{奇数})\end{cases} \tag{6}$$

$$f(t)=\frac{4}{2\pi i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\mathrm{e}^{i(2m+1)t}=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)t \tag{7}$$

きょうの quiz

$$f(t)=\begin{cases}1 & (0\le t<\pi)\\ 0 & (\pi\le t<2\pi)\end{cases} \tag{8}$$

のとき,

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-int}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\sqrt{\pi/2} & (n=0)\\ 0 & (n=\text{偶数}, n\neq 0)\\ \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}n} & (n=\text{奇数}).\end{cases} \tag{9}$$

[1] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/mathmodel/

[2] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, へや 1-508, でんわ 077-543-7501