数理モデル基礎/演習[1] 龍谷大学理工学部数理情報学科 2002年1月16日 樋口さぶろお[2]

29 Fourier 級数を用いた微分方程式の解法

次の周期 $T=2\pi$ の関数を考える.

$$f(t)=2\pi-t \qquad (0\le t<2\pi) \tag{1}$$

$$f(t)=|\sin t| \qquad (-\pi\le t<\pi) \tag{2}$$

$$f(t)=\mathrm{e}^{-t} \qquad (0\le t<2\pi) \tag{3}$$

ただし, 与えられた範囲の定義を拡張して, 周期 $T=2\pi$ となるようにするものとする.

1. グラフを描け.
2. Fourier 級数展開

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \mathrm{e}^{int} \tag{4}$$

   したときの係数 f_n を求めよ.

3. 微分方程式

$$x''(t)+\omega^2 x(t)=f(t) \tag{5}$$

   の特解を求めよ. ただし, $\omega>0$ は整数でない定数.

28 略解

28.1 Fourier 級数展開を利用した微分方程式の解法

Fourier 級数変換で, それぞれの $f(t)$ について, Fourier 係数 f_n を求めると, 次のようになる.

28(2) $n=0$ のときを特別扱いすることに注意すると,

$$f_n=\begin{cases}0 & (n\text{:偶数})\\ \frac{4}{\sqrt{2\pi}ni} & (n\text{:奇数})\end{cases} \tag{6}$$

$$f(t)=\frac{4}{2\pi i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\mathrm{e}^{i(2m+1)t}=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)t \tag{7}$$

したがって, 次のものは特解.

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{f_n}{\omega^2-n^2}\mathrm{e}^{int}=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\omega^2-(2m+1)^2}\cdot\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)t \tag{8}$$

[1] `http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/mathmodel/`

[2] `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

28(3) $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t = 2\pi\delta_{n,0}$ を使って,

$$f_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \times (\delta_{n,+3} + \delta_{n,-3} + 3\delta_{n,+1} + 3\delta_{n,-1}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \times \begin{cases} 1 & (n = \pm 3) \\ 3 & (n = \pm 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{9}$$

$$f(t) = \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{3it} + 3\mathrm{e}^{it} + 3\mathrm{e}^{-it} + \mathrm{e}^{-3it}) = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t. \tag{10}$$

(これは 3 倍角の公式と同じ).
したがって, 次のものは特解.

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n}{\omega^2 - n^2}\mathrm{e}^{int} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\omega^2 - 3^2}\cos 3t + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\omega^2 - 1^2}\cos t. \tag{11}$$

28(4) $n = 0$ を特別扱い.

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(2\pi)^{3/2} & (n = 0) \\ \frac{\sqrt{2\pi}i}{n} & (n \neq 0) \end{cases} \tag{12}$$

$$f(t) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin nt. \tag{13}$$

('振動' の中心は $f = \pi$.)
したがって, 次のものは特解.

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n}{\omega^2 - n^2}\mathrm{e}^{int} = \frac{1}{\omega^2 - 0^2}\pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - n^2} \cdot \frac{1}{n}\sin nt. \tag{14}$$

28(5)

$$f_n = \begin{cases} \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}} & (n = 0) \\ 0 & (n : \text{偶数}, n \neq 0) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4}{n^2} & (n : \text{奇数}) \end{cases} \tag{15}$$

したがって, 次のものは特解.

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n}{\omega^2 - n^2}\mathrm{e}^{int} = \frac{\pi}{2\omega^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - (2m+1)^2}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)t \tag{16}$$

今日の quiz

$$f_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0, n : \text{偶数}) \\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{n} & (n = 4m+1, m : \text{整数}) \\ +\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{n} & (n = 4m+3, m : \text{整数}) \end{cases} \tag{17}$$