現象の数学 B

樋口さぶろお[1] **配布**: 2009-12-08 Tue **更新**: Time-stamp: "2009-12-08 Tue 10:02 JST hig"

8 N 質点の連成振動

8.1 略解:3 質点の連成振動

略解 固有振動数は, 半角公式を利用して

$$\begin{aligned}\omega_j =&2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\frac{j\pi}{8}\right)\\ =&2\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{j\pi}{4}\right)}{2}}\\ =&\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{m}},\sqrt{\frac{2k}{m}},\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{m}}\\ =&0.765367\times\sqrt{\tfrac{k}{m}},1.41421\times\sqrt{\tfrac{k}{m}},1.84776\times\sqrt{\tfrac{k}{m}}.\quad(j=1,2,3)\end{aligned}$$

j **番目の固有モードは,**

$$\boldsymbol{u}_j=\begin{pmatrix}\sin(\frac{j\pi}{4})\\ \sin(\frac{2j\pi}{4})\\ \sin(\frac{3j\pi}{4})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -1\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.\quad(j=1,2,3)$$

8.2 略解:4 質点の連成振動

略解

$$\omega_j=2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\frac{j\pi}{10}\right)=0.618034\times\sqrt{\tfrac{k}{m}},1.17557\times\sqrt{\tfrac{k}{m}},1.61803\times\sqrt{\tfrac{k}{m}},1.90211\times\sqrt{\tfrac{k}{m}}.\quad(j=1,2,3,4)$$

$$\boldsymbol{u}_j=\begin{pmatrix}\sin(\frac{j\pi}{5})\\ \sin(\frac{2j\pi}{5})\\ \sin(\frac{3j\pi}{5})\\ \sin(\frac{4j\pi}{5})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+\sin\frac{1}{5}\pi\\ +\sin\frac{2}{5}\pi\\ +\sin\frac{2}{5}\pi\\ +\sin\frac{1}{5}\pi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\sin\frac{2}{5}\pi\\ +\sin\frac{1}{5}\pi\\ -\sin\frac{1}{5}\pi\\ -\sin\frac{2}{5}\pi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\sin\frac{2}{5}\pi\\ -\sin\frac{1}{5}\pi\\ -\sin\frac{1}{5}\pi\\ +\sin\frac{2}{5}\pi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+\sin\frac{1}{5}\pi\\ -\sin\frac{2}{5}\pi\\ +\sin\frac{2}{5}\pi\\ -\sin\frac{1}{5}\pi\end{pmatrix}.\quad(j=1,2,3,4)$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

復習:N 質点の固定端の連成振動の運動方程式 ($x_0 = x_{N+1} = 0$)

各質点の変位を $x_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ **とすると**,

$$m x_n'' = -k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n).$$

j **番目のモード** $(j = 1, \ldots, N)$ **の固有振動数は**

$$\omega_j = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{j\pi}{2(N+1)}\right).$$

j **番目のモード** $(j = 1, \ldots, N)$ **の波数は**

$$p_j = \frac{j\pi}{N+1}.$$

固有振動数と波数の間の関係 $\boxed{\textbf{分散関係}}$

$$\omega_j = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\frac{p_j}{2}.$$

固有ベクトルは

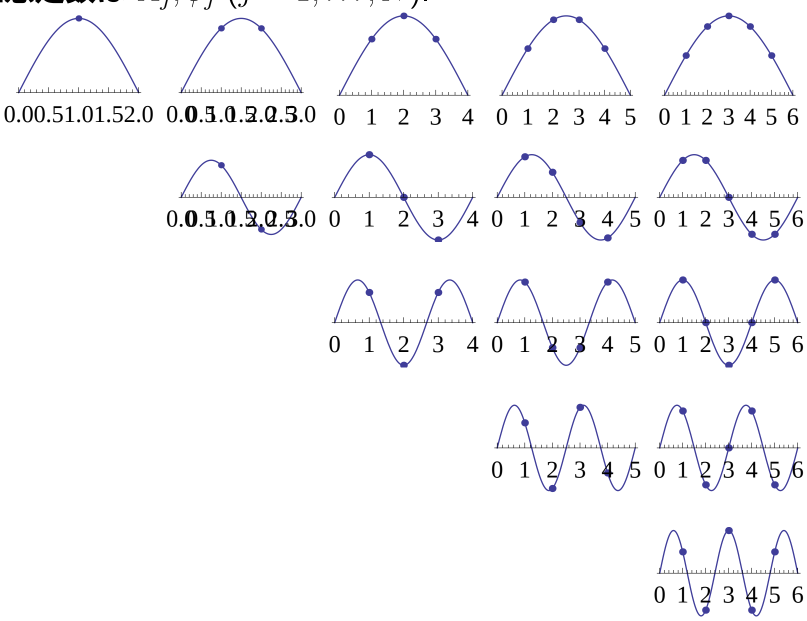
$$\boldsymbol{u}_j = \begin{pmatrix} \sin(1p_j) \\ \sin(2p_j) \\ \vdots \\ \sin(Np_j) \end{pmatrix}$$

一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=1}^{N} A_j \boldsymbol{u}_j \cos(\omega_j t + \phi_j)$$

$$x_n(t) = \sum_{j=1}^{N} A_j \sin(p_j n) \cos(\omega_j t + \phi_j). \quad (n = 0, \ldots, N+1)$$

任意定数は A_j, ϕ_j $(j = 1, \ldots, N)$.



横方向: **質点の個数** $N = 1, 2, 3, 4, 5$. **縦方向**: **モード番号** $j = 1, 2, \ldots, N$.

9　N 質点の連成振動から波動へ

今日の目標

- 分散関係 (波数と固有振動数の関係) を導こう!
- N 質点の連成振動の $N \to \infty$ 極限として, 波動方程式を導こう.

9.1　quiz:波動方程式

長さ L のゴムひものびの $u(x,t)$ は区間 $[0,L]$ の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

を満たす. 解 $u(x,t) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$ を考える. $v > 0$ は定数.

1. 時刻 $t = \frac{L}{2v}$ における変位の様子を, 横軸 x 縦軸 u で描こう.
2. 点 $x = \frac{3}{4}L$ における変位の変化の様子を, 横軸 t 縦軸 u で描こう.
3. 任意の時刻 t で $u(x,t) = 0$ となっているような点 x をすべて求めよう.
4. $u(x,t)$ が波動方程式を満たすことを確かめよう.

今日の範囲に対応する参考書のお奨め問題

小形 p.60-70,p.80,p.81

弦の振動 小形 例題 4.1(p.68) 小形 4 章演習問題 [3](p.81)

e ラーニングシステムで模範解答を作ろう!プロジェクトをやろう.

次回の予習ポイント

変数分離形, フーリエ級数 (計算科学や現象の数学でやった人は)

e ラーニングシステム `https://r-els.media.ryukoku.ac.jp` で予習復習問題をやろう.

プチテスト返却

Web で返却と点数通知しました.

学習サポート

quiz 返却と前回以前の資料配布　1-503 前掲示板のところでやっています.

オフィスアワー　月昼と火 4(1-502)

チューター　金 3(1-614).

携帯出席登録

`http://hig3.net/`