現象の数学 B

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-12-22 Tue 更新: Time-stamp: "2009-12-23 Wed 10:27 JST hig"

10 波動方程式の変数分離による解

10.1 略解:自由境界条件のもとでの変数分離法

略解 $u(x,t)=X(x)T(t)$ を代入すると,

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=v^2\cdot\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

左辺は x に関して定数, 右辺は t に関して定数. よって両辺は定数. これを $-\omega^2$ とおく (この量が負でないと振動にならない).

左辺より

$$T''(t)=-\omega^2 T(t).$$

よって, $T(t)=A\cos(\omega t+\phi)$.

右辺より

$$X''(x)=-\frac{\omega^2}{v^2}X(x).$$

よって, $X(x)=B\cos(\frac{\omega}{v}x+\theta)$. (ここで $\sin$ とおいても θ が $\pi/2$ ずれるだけで最終的な結果は同じ)

境界条件より, $0=X'(0)=-\frac{\omega B}{v}\sin(\theta)=X'(L)=-\frac{\omega B}{v}\sin(\frac{\omega L}{v}+\theta)$. よって, $\theta=0, \frac{\omega L}{v}=j\pi$. $(j\in\mathbb{Z})$. 意味があるのは $j=0,1,2,3,\ldots$.

よって固有振動数は $\omega_j=\frac{jv\pi}{L}$, 固有モードは $\cos(\frac{j\pi}{L}x)\cos(\frac{jv\pi}{L}t+\phi)$ $(j=0,1,2,\ldots)$.

モード $j=0$ が含まれるのは, 自由境界条件なので, $u_0(x,t)=$ 定数 $\neq 0$ というモードがあるため (実は $u_0(x,t)=At+B$ という形が許されるが, これが欲しいかどうかは場合による).

10.2 略解:拡散方程式に対する変数分離法

略解 再出題します.

[1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

11　フーリエ級数展開

今日の目標

- Fourier **級数展開で初期値問題を解こう**!

11.1　quiz:正弦関数の積の定積分

$e_j(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{j\pi}{L} x$ **に対して**

$$\int_0^L e_j(x) e_k(x) \, \mathrm{d}x = ?$$

11.2　quiz:正弦関数と余弦関数の積の定積分

$j, k \in \mathbb{N}$ **のとき**,

$$\int_0^L \sin \frac{j\pi}{L} x \cos \frac{k\pi}{L} x \, \mathrm{d}x = ?$$

今日の範囲に対応する参考書のお奨め問題

e **ラーニングシステムで模範解答を作ろう**!**プロジェクトをやろう**.

次回の予習ポイント

内積, **基底** (**線形代数**).

e **ラーニングシステム** `https://r-els.media.ryukoku.ac.jp` **で予習復習問題をやろう**.

学習サポート

quiz 返却と前回以前の資料配布　1-503 **前掲示板のところでやっています**.

オフィスアワー　**月昼と火** 4(1-502)

チューター　**金** 3(1-614).

携帯出席登録

`http://hig3.net/`

目次 前回 次回 略解