現象の数学 B

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-01-12 Tue 更新: Time-stamp: "2010-01-12 Tue 16:10 JST hig"

11 フーリエ級数展開

11.1 略解:正弦関数と余弦関数の積の定積分

略解

$$A_{jk} = \int_0^L \sin\frac{j\pi}{L}x \cos\frac{k\pi}{L}x \,\mathrm{d}x$$

とおく.

$j = k$ のとき, 倍角 (または積和) 公式より, $A_{jj} = \int_0^L \frac{1}{2}\sin\frac{2j\pi}{L}x \,\mathrm{d}x = 0.$

$j \neq k$ のとき, 積和公式より

$$\begin{aligned} A_{jk} =& \frac{1}{2}\int_0^L \left(\sin\frac{(j+k)\pi}{L}x + \sin\frac{(j-k)\pi}{L}x\right) \,\mathrm{d}x \\ =& -\frac{L}{2\pi}\left[\frac{1}{j+k}\cos\frac{(j+k)\pi}{L}x + \frac{1}{j-k}\cos\frac{(j-k)\pi}{L}x\right]_0^L \\ =& -\frac{L}{2\pi}\left(\frac{1}{j+k}(\cos(j+k)\pi - 1) + \frac{1}{j-k}(\cos(j-k)\pi - 1)\right). \end{aligned}$$

ここで, $j+k$ と $j-k$ の偶奇は一致して, $\cos(j+k)\pi = \cos(j-k)\pi = (-1)^{j+k}$ であることに注意すると, $j+k$ が偶数のとき $A_{jk} = 0$. 上の場合 $j = k$ もこれに含まれる. 一方, $j+k$ が奇数のとき,

$$A_{jk} = -\frac{L}{2\pi}\left(\frac{1}{j+k}(-2) + \frac{1}{j-k}(-2)\right) = \frac{2L}{\pi}\frac{j}{j^2-k^2}.$$

まとめると,

$$A_{jk} = \int_0^L \sin\frac{j\pi}{L}x \cos\frac{k\pi}{L}x \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (j+k \text{ が偶数}) \\ \frac{2L}{\pi}\frac{j}{j^2-k^2} & (j+k \text{ が奇数}) \end{cases}$$

12 フーリエ級数展開による初期値問題の解

今日の目標

- Fourier 級数展開で初期値問題を解こう!

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

公式

正弦関数の積の積分

$e_j(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{j\pi}{L} x$ **に対して**

$$\int_0^L e_j(x) e_k(x)\ \mathrm{d}x = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases}$$

積和公式で証明できる.

$x^n \sin x$ の不定積分

$$\begin{aligned} \int \sin x\ \mathrm{d}x &= -\cos x \\ \int x \sin x\ \mathrm{d}x &= -x \cos x + \sin x \\ \int x^2 \sin x\ \mathrm{d}x &= (x^2 - 2)\cos x + 2x \sin x \\ &\vdots \end{aligned}$$

部分積分を繰り返して証明できる.

Fourier **級数展開**

$f(x)$ **の条件**, $e_j(x)$ **の意味は授業参照**.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j(x) \text{ のとき } c_j = \int_0^L e_j(x) f(x)\ \mathrm{d}x.$$

左から $\int \mathrm{d}x\ e_k(x)$ **を作用させて証明できる**.

12.1 quiz:Fourier 級数展開

$[0, L]$ **の関数**

$$f(x) = \begin{cases} a & (\frac{1}{4}L \leq x \leq \frac{3}{4}L) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

が

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \frac{j\pi}{L} x$$

と Fourier **級数展開されるとき**, **係数** c_j **を求めよう**.

12.2 quiz:Fourier 級数展開

$[0, L]$ の関数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{L} \times x & (0 < x < L) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

が

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \frac{j\pi}{L} x$$

と Fourier 級数展開されるとき, 係数 c_j を求めよう.

12.3 quiz:波動方程式の初期値問題

区間 $[0, L]$ で, 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

を考える ($L, v > 0$ は定数).

固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$, 初期条件 $u(x,0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a(x^2 - Lx)$ のもとで解を Fourier 級数展開の形に求めよう.

今日の範囲に対応する参考書のお奨め問題

小形 例題 4.3(p.72) 小形 第 4 章演習問題 [1](p81),[6][8](p.82)

e ラーニングシステムで模範解答を作ろう!プロジェクトをやろう.

次回の予習ポイント

2 変数関数の合成微分法.

e ラーニングシステム `https://r-els.media.ryukoku.ac.jp` で予習復習問題をやろう.

ファイナルトライアル計画!

- 2 質点の連成振動の固有値と固有モードを求める (プチテスト 3 の再出題)
- 3 質点の連成振動の固有値と固有モードを求める (L07)
- 計算問題を含む Fourier 級数変換 (L11,L12)
- Fourier 級数変換を利用した初期値問題の解 (L10,L12)
- 進行波解 (L13)

2010-01-19 **に情報を更新します**. **また**, **プチテストの予想問題を**, **模範解答を作ろうプロジェクトとして投稿するかもしれません**.

学習サポート

quiz 返却と前回以前の資料配布　1-503 **前掲示板のところでやっています**.

オフィスアワー　**月昼と火** 4(1-502)

チューター　**金** 3(1-614).

目次 **前回** **次回** **略解**

携帯出席登録

http://hig3.net/

PDF 版では省略

小形, 振動・波動, 裳華房 (1999) 図 4.4(p.72), 図 4.5(p.73) より引用