物体 1 個ばねたくさん

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L02(2010-10-05 Tue)

今日の目標

1. 物体 1 個ばね n 個のときに運動方程式を立てられるようになろう
2. 平衡点=力のつりあう点を見つけられるようになろう
3. 横振動の運動方程式を立てられるようになろう

http://hig3.net

Quiz 略解:

$$\frac{3}{4}\ell = x(0) = A\cos(-\theta) + \ell$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\ell\sqrt{\frac{k}{m}} = x(0) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(-\theta)$$

比をとると $\quad \dfrac{-\frac{1}{4}\ell}{\frac{\sqrt{3}}{4}\ell} = \dfrac{1}{-\tan(-\theta)}.$

よって, $\theta = -\frac{1}{3}\pi$ または $\frac{2}{3}\pi$. しかし, $\cos(-\theta) < 0$ より,$\theta = \frac{2}{3}\pi$.
これを代入して A を求めると, $A = \frac{1}{2}\ell$. よって一般解は

$$x(t) = \frac{1}{2}\ell\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{2}{3}\pi\right) + \ell.$$

これはほぼ図に描かれていた曲線です.

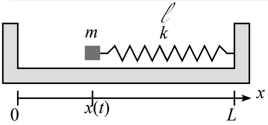
プレテスト講評

- 1,2,3,4 各 25 点, 計 100 点.
- 1,2 は復習問題, 3,4 はこのコース (の前半) でできるようになる問題.
- 最初の計画: 40-80 点の人を 80-100 点にもっていく
- 修正された計画: 25-50 点の人を 75-90 点にもっていく
- やってよかった
- 本来 3 年生がだれでもとれる科目. あきらめたり甘く見たりせずに勉強しよう.

プレテスト returns

ばねの復元力 (フックの法則)

- 力の大きさ $= k \times |$変位$|$.
- 力の向き $=$ $\boxed{}$



$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{}$$

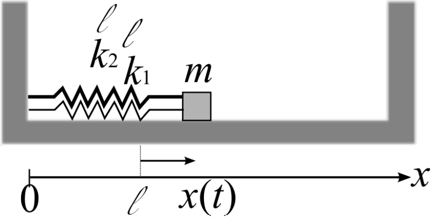
復習

$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$ の一般解は, $x(t) = A\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta)$. ($A, \theta$ は積分定数)

よって周期は $\boxed{}$

ばね 2 個並列

簡単のために自然長は共通としましょう.



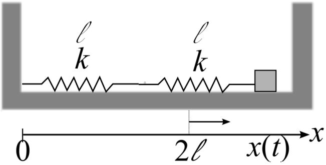
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{}$$

同じばねを 2 本使ったら周期は何倍? $\boxed{}$ 倍

寄り道: 同じばね 2 個直列

ちょと物理のりでないと説明しずらい…

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{}$$



なぜ?

同じばねを 2 本直列に使ったら周期は何倍? 　　倍

寄り道の寄り道: ばね定数と Young 率

フックの法則の別の形: $\sigma = E\epsilon$. 物理実験でやったはず

- σ: 応力の大きさ=力の大きさ/面積
- E: Young 率 物体の材質だけで決まり, 形や大きさによらない定数
- ϵ: ひずみ $= \frac{変位}{長さ} = \frac{x-\ell}{\ell}$ 物体が伸縮の比率

断面積 S をかけると 力 $F = -\sigma S = -ES \cdot \frac{(x-\ell)}{\ell}$

弾性係数 k と Young 率 E, 断面積 S, 長さ S の関係

$\boxed{\phantom{k = \frac{ES}{\ell}}}$

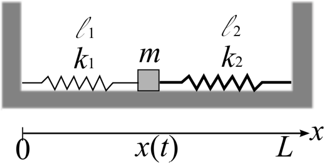
- 並列にばねを増やすのは, 面積を和にすることに相当. $\frac{E(S_1+S_2)}{\ell}$.
- 直列にばねを増やすのは, 長さを和にすることに相当. $\frac{ES}{\ell_1+\ell_2}$.

突然ですがここで携帯アンケート

どっちが速く振動する (=周期が短い)?

1.
2.
3.
4.
5.

両側にばね



寄り道の前を思い出して組みあわせ.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \boxed{}.$$

$$\boxed{}$$

周波数は $\boxed{}$.

平衡点

平衡点

力 $F(x) = 0$ となる位置 $x = x_0$.

- 力 $F(x_0) = 0$ を解いて求められる.
- その点にそっと (=初速度 0 で) 置いたら, 物体はずっとその位置にとどまる.

今の場合: 平衡点 $\boxed{}$.

非斉次微分方程式の特解の見つけ方と平衡点の関係

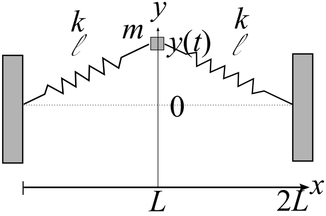
$x''(t) = -ax(t) + b$ を解こう! $m \cdot (-ax + b)$ が力.

$$\begin{aligned} x''(t) + ax(t) &= b \\ \text{両辺から } b \text{ を引いて } x''(t) + a(x - \tfrac{b}{a}) &= 0 \\ X(t) = x(t) - \tfrac{b}{a} \text{ とおいて } X''(t) + aX(t) &= 0 \end{aligned}$$

解くと $X(t) = A\cos(\sqrt{a}t - \theta)$, つまり $x(t) = A\cos(\sqrt{a}t - \theta) + \frac{b}{a}$.
要するに, 平衡点 $x_0 = \frac{b}{a}$ を原点 $X = 0$ にとった座標 $X(t) = x(t) - \frac{b}{a}$ で考えてる.
座標の原点を平衡点にとると楽

横振動

これまで見てたのはぜんぶ縦振動 (横 transverse ↔ 縦 longitudinal)
図で, 物体が y 方向だけ運動するとしよう.



ばねののび $= \sqrt{L^2 + y^2} - \ell$.
力の大きさ $= k(\sqrt{L^2 + y^2} - \ell)$.

左側のばねの力の向きの単位ベクトル

右側のばねの力の向きの単位ベクトル

力の和

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = k(\sqrt{L^2+y^2}-\ell) \times \left(\frac{1}{\sqrt{L^2+y^2}} \begin{pmatrix} -L \\ -y \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{L^2+y^2}} \begin{pmatrix} +L \\ -y \end{pmatrix} \right)$$

$$= k \left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{L^2+y^2}} \right) \begin{pmatrix} +0 \\ -2y \end{pmatrix}$$

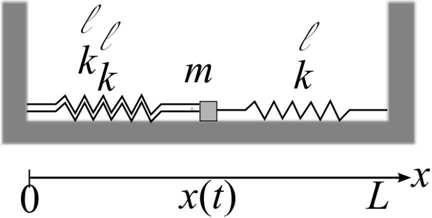
運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -2k \left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{L^2+y^2}} \right) y$$

待て次週 (一般の力のもとでの振動)

Quiz: 図の状況で, k はばね定数, ℓ はばねの自然長, L は壁から壁までの距離.

1. 運動方程式を立てよう.
2. 平衡点を求めよう.
3. 振動の周期を求めよう.



連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 p.1–p.11

- 横振動 小形 1 章演習問題 [4][5][6](p.15)

次回の予習ポイント

- テイラー展開 (微積分・演習 I)
- ポテンシャルエネルギー (物理数学 II, 力学, ベクトル解析)

予習復習問題

明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜