一般の力のもとでの微小振動

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L03(2010-10-12 Tue)

今日の目標

1. ばねの力とはかぎらない一般の力について, 微小振動の周期を求められるようになろう.
2. 横微小振動の周期を計算できるようになろう.
3. 平衡点と微小振動をポテンシャルの言葉で説明できるようになろう.

http://hig3.net

Quiz 略解

Quiz 略解:

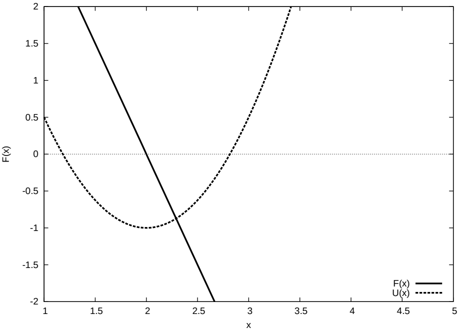
1. $mx'' = -2k(x-\ell) + k(L-x-\ell)$.
2. 右辺 $= F(x_0) = 0$ を解いて, $x_0 = \frac{1}{3}(\ell + L)$. これって, $2\ell = L$ だったら真ん中が平衡点だろうっていう直観とあってるじゃん.
3. $mx'' + 3kx = k(L+\ell)$ より, 一般解は $x(t) = A\cos(\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \theta) + \frac{1}{3}(\ell + L)$. ($A, \theta$ は任意定数). よって, 周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$.

ばねの力

$$1 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -3x + 6$$

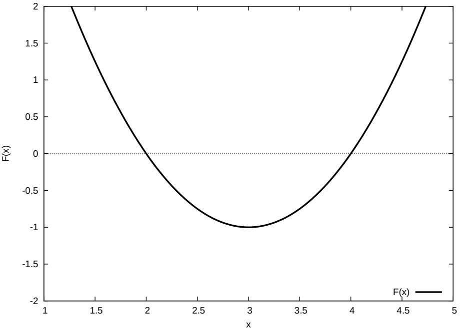
- 平衡点: $\boxed{}$ を解いて, $\boxed{}$
- 新しい座標 $X = \boxed{}$: ‘のび’
- $X'' = -3X$
- $\boxed{}$
- $x(t) = X(t) + 2 = A\cos(\sqrt{3}t - \theta) + 2$

計算しなくても, 平衡点の近くで振動しそうなことはわかる
こういうのは安定な平衡点 (次のページ参照)



こんな力?

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = x^2 - 6x + 8$$



- 平衡点: $x^2 - 6x + 8 = 0$ を解いて, $\boxed{}$
- $x = 2$ のまわりで振動しそう (単振動じゃない, 式じゃ書けない)
- $\boxed{}$ は安定な平衡点, $\boxed{}$ は不安定な平衡点.

安定な平衡点・不安定な平衡点

x 軸上の運動, $F(x)$: 力, $mx'' = F(x)$.

定義

- $F(x) = 0 \Leftrightarrow x$ は平衡点
  - $F'(x) > 0 \Rightarrow x$ は不安定な平衡点
  - $F'(x) < 0 \Rightarrow x$ は安定な平衡点
  - $F'(x) = 0 \Rightarrow x$ は安定か不安定かは場合による.

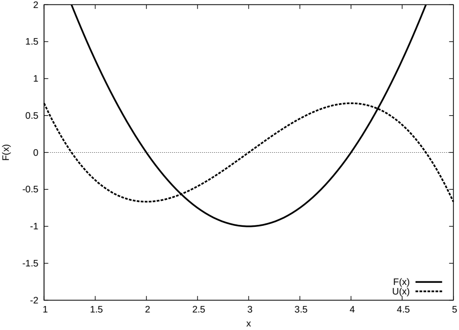
性質

- 平衡点にそっとおいた物体は, ずっと平衡点にとどまる.
- 安定な平衡点の近くでは物体は微小振動できる.
- 不安定な平衡点の近くに物体をそっとおくと, 平衡点から離れていく.

安定/不安定平衡点とポテンシャル

$-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = F(x) = x^2 - 6x + 8$ より，

ポテンシャル $U(x) = \boxed{}$



突然ですがここで携帯アンケート

どっちが速く振動する (=周期が短い=周波数が大きい)?

1.
2.
3.
4.
5.

安定な平衡点の近くでの微小振動

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = x^2 - 6x + 8$$

の安定な平衡点 $x = 2$ の近くでの様子を考えよう.
$F(x) = x^2 - 6x + 8$ を平衡点 $x = 2$ においてテイラー展開

$x = 2$ 近くの運動なら, ($|x - x_0|$ が小さければ), 2 次以上を無視していいかも. 単振動じゃん. 周波数 $\omega = \sqrt{2}$.

微小振動

$mx'' = F(x)$ に従って運動するとき, 安定な平衡点 $x = x_0$ の近くの運動は, 単振動 $mx'' = F'(x_0) \cdot (x - x_0)$ で近似できる.

例題

質量 $m=1$ の質点の時刻 t の座標を $x(t)$ とする. 位置 x では, 力 $F(x)=\mathrm{e}^{-6x}-\mathrm{e}^{-2x}$ を受けて運動している.

1. 運動方程式を書こう.
2. 平衡点を (すべて) 見つけよう.
3. 安定な平衡点を (すべて) 見つけよう.
4. 質点が安定な平衡点の十分近くで微小振動するとき, その周期を求めよう.

数理モデル II のりの平衡点と安定性

$x'' = F(x)$ の微小振動を数理モデル II のりで考えよう．新しい変数 $y = x'$ をいれて 1 階落とす.

$$x' = f_1(x, y) = y$$
$$y' = f_2(x, y) = F(x)$$

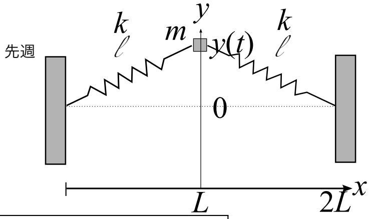
(x_0, y_0) が平衡点
$\Leftrightarrow \quad f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 0, F(x_0) = 0$
(x_0, y_0) は中心 or 節点 or 鞍点, 安定 or 不安定?
$\Delta x = x - x_0, \Delta x = y - y_0$. $f_i(x, y)$ を $(x, y) = (x_0, y_0)$ において (2 変数)1 次のテイラー展開.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ F'(x_0) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix}$$

行列の固有値 $\lambda = \sqrt{F'(x_0)}$?
中心 $\Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega$ が虚数 $\Leftrightarrow F'(x_0) < 0 \Leftrightarrow$ (今日の意味で) 安定

微小振動としての横振動

運動方程式



$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -2k\left(1-\frac{\ell}{\sqrt{L^2+y^2}}\right)y$$

平衡点 $y_0 = 0$,

以下 $y_0 = 0$ だけ考える. $y_0 = 0$ において $F(y)$ をテイラー展開

横振動では

安定性

- $\ell > L$ 不安定な平衡点
- $\ell = 0$ よくわかんない平衡点 (実は安定)
- $\ell < L$ 安定な平衡点

周波数 $\omega = \left(k(1 - \frac{\ell}{L})\right)^{1/2}$

L を $\boxed{}$ するほど, ℓ を $\boxed{}$ するほど振動数は大きくなる.
弦楽器調律の原理 (の一部)

Quiz

Quiz:
質量 $m = 1$ の物体の, 時刻 t の座標を $x(t)$ とする. 位置 x では, 力 $F(x) = \sqrt{3} - 2\cos x$ がはたらく. 物体の $-\pi < x < +\pi$ の範囲の運動を考える.

1. 平衡点を (すべて) 見つけよう.
2. 安定な平衡点を (すべて) 見つけよう.
3. 物体が安定な平衡点の十分近くで微小振動するとき, その周波数と周期を求めよう.

連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 p.12-14

- ばね 小形 1 章演習問題 [2](p.14)
- ばねの横振動 小形 1 章演習問題 [4][5][6](p.14)

次回の予習ポイント

- 2×2 行列の固有値固有ベクトル　線形代数
- 固定軸のある剛体の回転運動の方程式, 慣性モーメント　力学

予習復習問題

明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜