連成振動と基準座標

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L04(2010-10-19 Tue)

今日の目標

1. 複数の物体が複数のばねでつながれているとき, 運動方程式がかけるようになろう
2. 単純な連成振動の運動方程式を, 基準座標の方法で解けるようになろう.

http://hig3.net

Quiz 略解 I

先週の訂正

横振動の周波数 (p.14)

$\omega = \left(k(1 - \frac{\ell}{L})\right)^{1/2}$

Quiz 略解:

1. $$x''(t) = \sqrt{3} - 2\cos x.$$
2. $F(x) = \sqrt{3} - 2\cos x = 0$ を解いて，平衡点は $x = \pm\frac{1}{6}\pi$.
3. $F'(x) = +2\sin x$. $F'(+\frac{1}{6}\pi) = 1 > 0$, $F'(-\frac{1}{6}\pi) = -1 < 0$ より，安定な平衡点は $x = -\frac{1}{6}\pi$.

Quiz 略解 II

4. 安定な平衡点 $x = \frac{1}{6}\pi$ について考える. $F(x)$ を $x = \frac{1}{6}\pi$ においてテイラー展開すると,

$$\sqrt{3} - 2(\cos(-\tfrac{1}{6}\pi) - \sin -\tfrac{1}{6}\pi(x + \tfrac{1}{6}\pi) + \cdots) = -(x + \tfrac{1}{6}\pi) + \cdots$$

よって, $x = -\frac{1}{6}\pi$ の近くでの運動は

$$x''(t) = -(x(t) + \tfrac{1}{6}\pi)$$

で近似できる. $X = x + \frac{1}{6}\pi$ とおくと

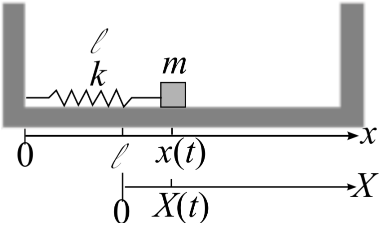
$$X'' + X = 0.$$

これは単振動で, $x(t) = X(t) - \frac{1}{6}\pi = A\cos(1 \cdot t - \theta) - \frac{1}{6}\pi$. 単振動の周波数は $\omega = 1$, 周期は $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$.

物体 1 個の振動 (復習)

m:質量,
k:ばね定数, ℓ:自然長, $x(t)$:物体の位置

$$mx''(t) = -k(x(t) - \ell)$$



平衡点 $x_0 = \ell$.
変数 $\boxed{}$ を
とると非斉次項が消える.

$$mX''(t) = -kX(t)$$

この X を平衡点からの変位, とか, ちょっと不正確だけどばねののび, という.
以下, X のことを x と書こう.

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

定石: $\boxed{}$ とおいて λ は後で決める.

$x(t) = A\mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて代入して λ を求めよう.

$$(\lambda)^2 A\mathrm{e}^{\lambda t} = -\frac{k}{m} A\mathrm{e}^{\lambda t}$$

よって

$$(\lambda)^2 = -\frac{k}{m}, \quad \lambda = \pm\sqrt{k/m} \times i.$$

$$\begin{aligned}
x(t) =& C_1 \mathrm{e}^{+i\sqrt{k/m}\,t} + C_2 \mathrm{e}^{-i\sqrt{k/m}\,t} \\
=& C_1[\cos(\sqrt{k/m}\,t) + i\sin(\sqrt{k/m}\,t)] \\
&+ C_2[\cos(-\sqrt{k/m}\,t) + i\sin(-\sqrt{k/m}\,t)] \\
=& (C_1 + C_2)\cos(\sqrt{k/m}\,t) + i(C_1 - C_2)\sin(\sqrt{k/m}\,t) \\
=& C\cos(\sqrt{k/m}\,t) + D(\sin\sqrt{k/m}\,t) \\
=& \sqrt{C^2 + D^2}\left[\cos(\sqrt{k/m}\,t)\frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}} + \sin(\sqrt{k/m}\,t)\frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}}\right] \\
=& A\cos(\sqrt{k/m}\,t - \theta)
\end{aligned}$$

周波数 $\boxed{}$ 周期 $\boxed{}$

ちょっと待った〜

今後は λ のかわりに □ ω を使う

ω は (あとで決めたい) 周波数

これからは次は公式のように使っていい.

単振動の方程式の解

$$x'' = -a^2 x$$

の解は,

□

□

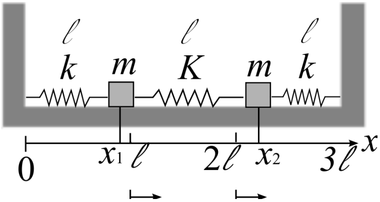
□

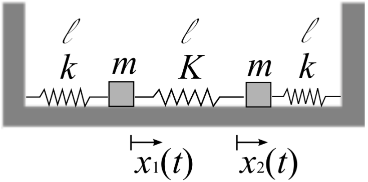
任意定数の組 $(C_1, C_2), (C, D), (A, \theta)$ の間にはそれなりな関係.

連成振動の運動方程式

$$mx_1'' = -k(x_1 - \ell) + K(x_2 - x_1 - \ell)$$
$$mx_2'' = -K(x_2 - x_1 - \ell) + k(3\ell - x_2 - \ell)$$

のび $X_1 = x_1 - \ell, X_2 = x_2 - 2\ell$.

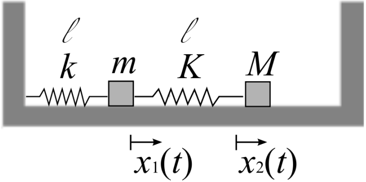




以後は, の
びを X_1, X_2 のかわりに x_1, x_2 とかく.
のびについての, この
方程式がいきなり書けるようになろう.

例題

Quiz:
図の場合に運動方程式をたてよう. x_1, x_2 はのび.



さっきのは特にきれいな場合. x_1, x_2 が対称的 (入れ替え可能)
$(1)+(2), (1)-(2)$ を作ろう!

$$m(x_1+x_2)'' = -k(x_1+x_2)$$
$$m(x_1-x_2)'' = -(k+2K)(x_1-x_2)$$

ここで, $\boxed{}$ とおく.

$$mX'' = -\,kX$$
$$mY'' = -\,(k+2K)Y$$

(連立) 運動方程式は X, Y に分離された. X, Y それぞれ単振動する.

基準座標

この X, Y のように, 座標 x_1, x_2 の 1 次式で, 分離されていて各々が単振動するものが基準座標 ($x_1 \pm x_2$ とはかぎらない).

$mX'' = -kX$ を解いて

$$X(t) = A_1 \cos(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t - \theta_1).$$

$mY'' = -(k+2K)Y$ を解いて

$$Y(t) = A_2 \cos(\sqrt{\tfrac{k+2K}{m}}t - \theta_2).$$

ここで, 任意定数 $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ は一般には $A_1 \neq A_2, \theta_1 \neq \theta_2$ であることに注意.

X, Y を x_1, x_2 について逆に解くと,

$\boxed{}$ よって,

$$x_1(t) = \tfrac{1}{2}A_1 \cos(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t - \theta_1) + \tfrac{1}{2}A_2 \cos(\sqrt{\tfrac{k+2K}{m}}t - \theta_2)$$
$$x_2(t) = \tfrac{1}{2}A_1 \cos(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t - \theta_1) - \tfrac{1}{2}A_2 \cos(\sqrt{\tfrac{k+2K}{m}}t - \theta_2)$$

任意定数を rename して

$$
\begin{aligned}
x_1 =& C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta_1\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t - \theta_2\right) \\
x_2 =& C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta_1\right) - C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t - \theta_2\right)
\end{aligned}
$$

大注意

もちろん $C_1, C_2, C_3, C_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ などとしてはいけない.

$C_1 = C_2$, $\theta_1 = \theta_2$ としてもいけない.

だって初期条件は 2 個の物体

の $\boxed{}$

例題

Quiz:

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= -x_1 - 4(x_1 - 2x_2) \\
x_2'' &= +2(x_1 - 2x_2) - x_2
\end{aligned}
$$

のときに, 工夫してやまかんで基準座標をみつけて, 運動方程式を分離しよう.

Quiz

Quiz:
連成振動の運動方程式

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= -7x_1 + 3x_2 \\
x_2'' &= 3x_1 - 7x_2
\end{aligned}
$$

を, 基準座標を用いて, 初期条件 $x_1(0) = x_2(0) = 2, x_1'(0) = x_2'(0) = 0$ のもとで解こう.

連絡

今日の範囲に対応する参考書のお奨め問題

小形 p.18-32

- 基準座標 小形 2 章演習問題 [4](p.38),
- 基準座標 小形 2 章演習問題 [8](p.38),

次回の予習ポイント

- 今度こそ 2×2 行列の固有値固有ベクトル　線形代数

予習復習問題

明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜