連成振動の固有周波数と固有モード

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L05(2010-10-26 Tue)

今日の目標

1. 一見してわからない場合でも連成振動の基準座標を見つけられるようになろう.
2. 連成振動の固有モード固有周波数を求められるようになろう.

http://hig3.net

Quiz 略解 I

あれっ, この場合の基準座標 $x_1 \pm x_2$ って,

$R = \frac{mx_1+mx_2}{m+M}, r = x_2 - x_1$ に似てない?

下の略解では, 初期条件から任意定数を決めるところを詳しく書いてますが, 答案の書き方としてはここまで詳しくなくていいです (正しい考え方で正しい答に到達しているなら).

Quiz 略解:

運動方程式で (1)±(2) を作り, $X = x_1 + x_2, Y = x_1 - x_2$ とおくと,

$$X'' = -4X, \qquad Y'' = -10Y$$

と分離される. すなわち $x_1 \pm x_2$ が基準座標. それぞれ解くと,

$$X(t) = A_1 \cos(2t - \theta_1), \qquad Y(t) = A_2 \cos(\sqrt{10}t - \theta_2).$$

Quiz 略解 II

初期条件 $X(0)=x_1(0)+x_2(0)=4, X'(0)=0, Y(0)=0, Y'(0)=0$ より,

$$A_1\cos(\theta_1) = 4 \quad (1)$$
$$2A_1\sin(\theta_1) = 0 \quad (2)$$
$$A_2\cos(\theta_2) = 0 \quad (3)$$
$$\sqrt{10}A_2\sin(\theta_2) = 0 \quad (4)$$

$(3)^2+(4)^2/10$ で θ_2 を消去することにより $A_2=0$. このとき θ_2 はどうでもよくて, $Y(t)=0$.
(1) より $A_1\neq 0$. (2)/(1) で A_1 を消去すると $\sin(\theta_1)=0$. よって $\theta_1=n\pi$ ($n\in\mathbb{Z}$). $(1)^2+(2)^2/4$ より $A_1=\pm 4$. (1) より, $(A_1,\theta_1)=(4,2n\pi),(-4,(2n+1)\pi)$. しかし, $X(t)$ にしてしまえばどれでも同じで, $X(t)=4\cos(2t)$.

$$x_1(t)=\frac{1}{2}(X(t)+Y(t))=2\cos(2t), \quad x_2(t)=\frac{1}{2}(X(t)-Y(t))=2\cos(2t)$$

例題

Quiz:

$$\begin{aligned} x_1'' &= -x_1 - 4(x_1 - 2x_2) \\ x_2'' &= +2(x_1 - 2x_2) - x_2 \end{aligned}$$

のときに, 霊感で基準座標 $a_1 x_1 + a_2 x_2$ をみつけて, 運動方程式を分離しよう.

霊感のない人のための方法

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}$$

と書こう. $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$, K は $n \times n = 2 \times 2$ 行列 $\left(\begin{smallmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

なぜ $-K$?

$X = ax_1 + a_2x_2$ が基準座標になってるとする.

基準座標って?

$$[a_1x_1 + a_2x_2]'' = (a_1 \quad a_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'' \underbrace{=}_{\text{運動方程式}} -(a_1 \quad a_2)K\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

右辺が

$$-\text{定数} \times [a_1x_1 + a_2x_2] =$$

にならないといけない. 定数を λ とおく.

$$(a_1 \quad a_2)K = \lambda \times (a_1 \quad a_2)$$

両辺の転置行列をとって, (復習:行列では $\boxed{}$)

$$K^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

転置行列 K^{t} の固有値を λ, 固有ベクトルを $\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right)$ とすると, 基準座標は $X = a_1 x_1 + a_2 x_2$ で,

$$X'' = -\lambda X$$

という方程式が導かれる. $\boxed{}$

$$X(t) = C_1 \mathrm{e}^{i\sqrt{\lambda}\,t} + C_2 \mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,t}$$

固有値は 2 個 λ_1, λ_2. 固有ベクトル, したがって基準座標は 2 個出てくるはず.

例題

さっきの問で転置行列 K^{t} の固有値と固有ベクトルを求めよう.

基準座標の方法のまとめ

1. 基準座標を 2 個見つける.
    1. 霊感で
    2. 霊感がきかなかったら, K の転置 K^{t} の固有ベクトルを求めたらそれが係数.
2. 2 個の基準座標について運動方程式を導く
    - $X'' = -\lambda X$ となるはず.
    - λ は K^{t} の固有値
3. 2 個の基準座標の運動方程式を解く.
    - 単振動になるはず. 周波数 $\sqrt{\lambda}$.
4. もとの座標にもどす.

初期条件は, x, X の便利な方に適用.

固有周波数と固有モードを求める方法

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}, \quad K = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を考える.
ここまでの経験から,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t}$$

というタイプの解がありそう. $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \omega$ は後で都合よく決める定数.

これまでは $\mathrm{e}^{\lambda t}$ っておいてたけど固有値 λ とかぶるし, 虚数っぽいからあらかじめ i を出した $i\omega$ に書き換えただけ

代入

$$(i\omega)^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t} = -K \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ω と $\left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right)$ を決めたかったんだけど, 行列 K の,

今の場合, $\omega^2 = 1, 9, \quad \boldsymbol{v} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right).$
よって 4 つの独立な解がある.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\sqrt{2}t}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\sqrt{2}t}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i3t}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-i3t}.$$

線形微分方程式だから線形結合も解.
$\omega^2 = 1$ の 2 個の線形結合を考えると,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (C_1 e^{i\sqrt{1}t} + C_2 e^{-i\sqrt{1}t}) = \cdots = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \cos(\sqrt{1}t - \theta_1)$$

$\omega^2 = 9$ の 2 個の線形結合は

$$\boxed{\phantom{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(3t - \theta_2)}}$$

よって一般解は

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \cos(\sqrt{1}t - \theta_1) + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(3t - \theta_2)$$

$A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ は任意定数.

固有周波数, 固有モード

K の固有値 ω^2, 固有ベクトル $\binom{c_1}{c_2}$ に対応して,
周波数 $\omega(>0)$ をこの連成振動の固有周波数, 解 $\binom{c_1}{c_2}\cos(\omega t-\theta)$ をこの連成振動の固有モードという.

固有周波数, 固有モードは, 変数と同じ数だけ (いまは 2 個) ある.

固有周波数, 固有モードを経由した連成振動の解き方

1. K の固有値 ω^2, 固有ベクトル $\binom{c_1}{c_2}$ を求める.
2. 固有モード $u(t,\theta)=\binom{c_1}{c_2}\cos(\omega t-\theta)$, 固有周波数 ω.
3. 2 個でてきた固有モードの線形結合 $A_1u_1(t,\theta_1)+A_2u_2(t,\theta_2)$ を作る.
4. 初期条件から, A_1, A_2, u_1, u_2 を決める.

固有モードとは,

詳しくは来週

Quiz

Quiz:
連成振動を表す x_1, x_2 についての微分方程式系

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= -2x_1 + 2x_2 \\
x_2'' &= -x_1 - 5x_2
\end{aligned}
$$

の固有周波数, 固有モードを, さらに一般解を求めよう.

連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 p.23-32

- ばねの連成振動 小形 2 章演習問題 [1](p.38)
- ばねの連成振動 小形 2 章演習問題 [2](p.38)
- 二重振り子の連成振動 小形 2 章演習問題 [10](p.39)
- LC 回路の連成振動 小形 2 章演習問題 [11](p.14)

次回の予習ポイント

- 三角関数の和積公式
- 正規直交基底

予習復習問題明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜

プチテストやります!

日時 2010-11-09 火 3, 90 分.
場所 いつもと同じ
配点 100 点が 30 ピーナッツ.
公欠 基準と手続きが独自です. Web ページの病欠・公務欠席等の届出とそれを考慮する (しない) 方法参照.

出題計画 未確定です. 2010-11-02 火の授業で修正+詳細化される予定です.

- 物体 1 個, ばね 1 個または複数のときに運動方程式を立てよう (L01)
- 物体 1 個, ばね 1 個または複数のときに運動方程式を解こう (L02)
- 単振動の振幅, 周期, 周波数, 振動数などを答えよう (L01)
- 単振動の正確なグラフを描こう (L01)
- ばねとは限らない力について, 安定, 不安定な平衡点を見つけよう (L02)
- 安定な平衡点の近くでの微小振動の周波数, 周期を求めよう (L03)
- 物体 2 個, ばね複数のときに運動方程式を立てよう (L04)
- 物体 2 個, ばね複数のときに基準座標を使って運動方程式を解こう.(L04)
- 物体 2 個, ばね複数のときに固有周波数, 固有モードを使って運動方程式を解こう (L05)
- うなりについて何かしよう (L06)

模範解答を作ろうプロジェクト!で最大 5 ピーナッツゲット!

現象の数学 B の問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです.

$\boxed{\text{e ラーニングシステム}} \rightarrow \boxed{\text{現象の数学 B}} \rightarrow \boxed{\text{模範解答を作ろうプロジェクト!}}$

に投稿されている問題に対して, 模範解答を紙に作成して, スキャンしたものをフォーラムに返信してください.

スキャンは, 物理数学・演習 II のレポートと同じのりです. 自宅のスキャナや, 理工学部実習室 1-612(おすすめ) や, 3 号館地下第 2 セルフラーニング室でスキャンできます.

http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php

- 貢献に対して 1 問あたり最大 5 ピーナッツ, 1 人あたり最大 5 ピーナッツの加算があります.
- 最初の解答が完璧でなかった場合, 投稿した人, または他の人が修正したものを再投稿することができます.
- 最終的な完璧な答案を投稿した人よりも, 各難関ポイントを解決して貢献した人を評価してピーナッツを決定します. 何人かの貢献で 1 問の最終的な答案が完成したら, 5 ピーナッツがその人々に分配されます.
- また, 独立に作成した投稿でも, 同じ内容なら, 一番最初に投稿した人のみを評価します.
- 問題はときどき追加します. フォーラムの右側ブロックで, ‘このフォーラムをメール購読する’ を選択すると, 問題が公開されたときにメールで通知されます.