固有モードと基準座標の関係+うなり

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B L06(2010-11-02 Tue)

今日の目標

1. 固有モードと基準座標の関係を説明できるようになろう.
2. 固有モードがわかったら基準座標が求められるようになろう.
3. 和積公式をつかってうなり (beat) を説明できるようになろう.

http://hig3.net

前回の訂正

L05 の講義資料の p.10 で,$\omega^2 = 2$ となっているのは $\omega^2 = 1$ の誤りです. おわびして訂正します.
この結果, それ以降に誤りが発生しています. 訂正版を Web に置きました (訂正部分は赤字)

講評

- 次からは下に書いてあるような感じで過程書いてね.
- 誤答パターン 1: 固有モードなのに K じゃなく K^{t} の固有ベクトル求めてる.
- 誤答パターン 2: 固有ベクトルが正しく求められていない. 線形代数を復習しよう.
- 誤答パターン 3: $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ のように, ベクトルなのに左辺が $\boldsymbol{x}$ にも $\vec{x}$ にもなってない. (今回は減点はしなかったけど).
- プチテストでは, 基準座標, 固有モードのどちらの方法でも解ける必要あり.

過程つき Quiz 解答

Quiz 略解: 微分方程式は

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とかける.

$\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{e}^{i\omega t}$ とおいて代入すると,

$$(i\omega)^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t} = -K \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t}$$

よって ω^2 は K の固有値, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ は K の固有ベクトル.

K の固有値固有ベクトルは $\lambda = 3, 4$, $\boldsymbol{v} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ なので, 固有周波数 $\omega = \sqrt{3}, 2$. 固有モードは,

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) C_1 \mathrm{e}^{+i\sqrt{3}t} + \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) C_2 \mathrm{e}^{-i\sqrt{3}t} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) A_1 \cos(\sqrt{3}t - \theta_1) \quad \text{と} \quad \color{red}{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)} A_2 \cos($$

一般解は固有モードの線形結合で

$$x(t) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) A_1 \cos(\sqrt{3}t - \theta_1) + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) A_2 \cos(2t - \theta_2)$$

ここで $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ は任意定数.

基準座標で同じ問題を解いてみよう

Quiz 略解: 微分方程式は

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とかける.

転置行列 K^{t} の固有値固有ベクトルは $\lambda = 3, 4$, $\boldsymbol{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ なので, 基準座標は $X_1 = x_1 + x_2, X_2 = x_1 + 2x_2$ となる. これらの従う微分方程式をもとの微分方程式を加減して作ると,

$$X_1'' = -3X_1, \quad X_2'' = -4X_2$$

と分離される．よって

$$X_1 = A_1 \cos(\sqrt{3}t - \theta_1), \quad X_2 = A_2 \cos(2t - \theta_2).$$

$$\begin{aligned} x_1 = 2X_1 - X_2 =& 2A_1 \cos(\sqrt{3}t - \theta_1) - A_2 \cos(2t - \theta_2) \\ x_2 = -X_1 + X_2 =& -A_1 \cos(\sqrt{3}t - \theta_1) + A_2 \cos(2t - \theta_2) \\ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) =& \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) A_1 \cos(\sqrt{3}t - \theta_1) + \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) A_2 \cos(2t - \theta_2) \end{aligned}$$

ここで $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ は任意定数.
固有モードによる解法とは, ベクトルが定数倍違うかもしれないが, 任意定数で吸収できる.

固有モードから基準座標へ

連成振動

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), K : 2\times\ 2 \text{ 行列}$$

の一般解が, 2 つの固有モードの線形結合で

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ b_1 \end{smallmatrix}\right) A_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + \left(\begin{smallmatrix} a_2 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right) A_2 \cos(\omega_2 t - \theta_2)$$

と書けるとする.

を作ると, 2 個目の固有モードが消える!

$$b_2 x_1(t) - a_2 x_2(t) = (b_2 a_1 - a_2 b_1) A_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1).$$

これが基準座標 $X(t) = b_2 x_1(t) - a_1 x_2(t)$.
同様に, もう 1 個の基準座標は

$$Y(t) = b_1 x_1(t) - a_1 x_2(t) = (b_1 a_2 - a_1 b_2) A_2 \cos(\omega_2 t - \theta_2).$$

(基準座標はこの定数倍でもいい: $X(t) = \frac{1}{2}(b_2 x_1(t) - a_2 x_2(t))$ とか).

もうすこしかっこよく言うと

簡単のため $A_1 = A_2 = 1, \theta_1 = \theta_2 = 0$ のような感じで書く.
固有モードを $\boldsymbol{u}_1 \cos(\omega_1 t), \boldsymbol{u}_2 \cos(\omega_2 t)$ としたとき,

- $\boldsymbol{u}_2$ (将来は $\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \ldots$) に直交するベクトルを $\boldsymbol{v}_1$
- $\boldsymbol{u}_1$ (将来は $\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \ldots$) に直交するベクトルを $\boldsymbol{v}_2$

とする. 一般には $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2 \neq \boldsymbol{u}_2$. 基準座標は

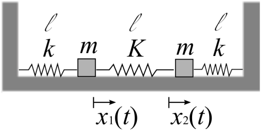
- $X(t) = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1) \cos(\omega_1 t)$
- $Y(t) = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2) \cos(\omega_2 t)$.

この $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が, 実は先週言ってた $\boxed{}$ にちょうどなっていることを示せる.

ただし, 対称行列 $K = K^{\mathrm{t}}$ のときは, $\boldsymbol{u}_i$ が正規直交基底にとれて $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i$. プチテストではそんな簡単な問題は出しません.

うなり

弱いばね K でつながった, 対称な 2 個の物体を考えよう ($K \ll k$).
固有周波数, 固有モードを求め, 初期条件 $x_1(0) = a, x_2(0) = x_1'(0) = x_2'(0) = 0$ のもとで運動を求めよう.



$$
\begin{aligned}
x_1(t) =& \frac{a}{2}(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) \\
x_2(t) =& \frac{a}{2}(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t))
\end{aligned}
$$

どんなグラフ?

和積公式 (暗記するな危険)

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= +\,2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -\,2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha + \sin\beta &= \\
\sin\alpha - \sin\beta &=
\end{aligned}
$$

加法定理

$$
\begin{aligned}
\sin(A \pm B) &= \sin A\cos B \pm \cos A\sin B \\
\cos(A \pm B) &= \cos A\cos B \mp \sin A\sin B
\end{aligned}
$$

で, $A+B=\alpha, A-B=\beta$ と思って和や差を作って導く方が安全.
右辺に係数 2 が必要なのは当然. 左辺は最大 2, 右辺の $\cos\cos$ は最大 1 の量だから,

$$x_1(t) = \frac{a}{2}(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = +a\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t$$
$$x_2(t) = \frac{a}{2}(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) = -a\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t$$

差 (うなりの周波数) $\omega_{\mathsf{beat}} = |\omega_1 - \omega_2| = \sqrt{(k+2K)/m} - \sqrt{k/m}$ (小さい)
平均 $\omega_{\mathsf{av}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \simeq \sqrt{k/m}$ とおくと, $\omega_{\mathsf{beat}} \ll \omega_{\mathsf{av}}$

$$x_1(t) = a\cos(\omega_{\mathsf{av}} t)\cos(\tfrac{1}{2}\omega_{\mathsf{beat}} t)$$

$$x_2(t) = \boxed{}$$

グラフ

Quiz:
$x(t) = \cos 9t + \cos 7t$ の, 区間 $0 \le t \le 2\pi$ でのグラフを描こう.

Quiz/連絡

Quiz:
$x(t) = 2\cos 6t + 2\cos 8t$ のグラフを, 三角関数の和積公式を利用して $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で描こう. x,t 軸の目盛を忘れずに記そう. 描くのに使った補助線を残そう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題 小形 p.18-32
うなり 小形 2 章演習問題 [5](p.39), うなり 小形 2 章演習問題 [6](p.39), うなり 小形 2 章演習問題 [7](p.39)
プチテストの次の回の予習ポイント

- 3×3 行列の固有値固有ベクトル (線形代数)

予習復習問題明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜期限はプチテスト後の 2010-11-15 月

プチテストやります!

- 日時 2010-11-09 火 3, 90 分.
- 場所 いつもと同じ
- 配点 100 点が 30 ピーナッツ.
- 公欠 基準と手続きが独自です. Web ページの病欠・公務欠席等の届出とそれを考慮する (しない) 方法参照.

出題計画 未確定です.

- 物体 1 個, ばね 1 個または複数のときに運動方程式を立てよう (L01)
- 物体 1 個, ばね 1 個または複数のときに運動方程式を解こう (L02)
- 単振動の振幅, 周期, 周波数, 振動数などを答えよう (L01)
- 初期条件が与えられたとき, 単振動の正確なグラフを描こう (L01)
- ばねとは限らない力について, 安定, 不安定な平衡点を見つけよう (L02)
- 安定な平衡点の近くでの微小振動の周波数, 周期を求めよう (L03)
- 物体 2 個, ばね複数のときに運動方程式を立てよう (L04)
- 物体 2 個, ばね複数のときに基準座標を使って運動方程式を解こう.(L04)
- 物体 2 個, ばね複数のときに固有周波数, 固有モードを使って運動方程式を解こう (L05)
- 和積公式を利用してうなりのグラフを描こう (L06)

模範解答を作ろうプロジェクト!で最大 5 ピーナッツゲット!

現象の数学 B の問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです.
e ラーニングシステム → 現象の数学 B → 模範解答を作ろうプロジェクト!
に投稿されている問題に対して, 模範解答を紙に作成して, スキャンしたものをフォーラムに返信してください.

スキャンは, 物理数学・演習 II のレポートと同じのりです. 自宅のスキャナや, 理工学部実習室 1-612(おすすめ) や, 3 号館地下第 2 セルフラーニング室でスキャンできます.

`http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php`

- 貢献に対して 1 問あたり最大 5 ピーナッツ, 1 人あたり最大 5 ピーナッツの加算があります.
- 最初の解答が完璧でなかった場合, 投稿した人, または他の人が修正したものを再投稿することができます.
- 最終的な完璧な答案を投稿した人よりも, 各難関ポイントを解決して貢献した人を評価してピーナッツを決定します. 何人かの貢献で 1 問の最終的な答案が完成したら, 5 ピーナッツがその人々に分配されます.
- また, 独立に作成した投稿でも, 同じ内容なら, 一番最初に投稿した人のみを評価します.
- 問題はときどき追加します. フォーラムの右側ブロックで, ‘このフォーラムをメール購読する’ を選択すると, 問題が公開されたときにメールで通知されます.