

うなり+3物体の連成振動

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

現象の数学 B L07(2010-11-16 Tue)

今日の目標

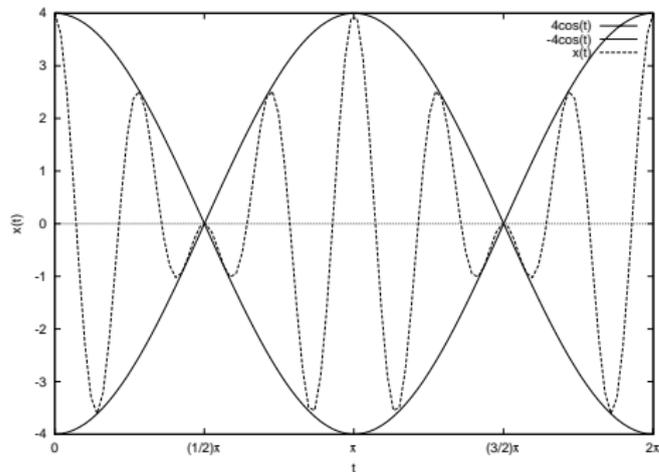
- ① うなりがどんなときに起きるか説明できるようになる。
- ② 3物体の連成振動が固有モードを使って解けるようになる。
- ③ 固有モードの形を想像できるようになる。



<http://hig3.net>

Quiz 略解 I

Quiz 略解: 和積公式によれば $x(t) = 4 \cos 7t \cos t$. 周期 2π の余弦曲線 $\cos t$ (の ± 4 倍) が包絡線となり, これを上下限として, 周期 $\frac{2}{7}\pi$ で振動する.



$\pm 4 \cos t$ を描いた後で, $x(t)$ を描くときの注意. n を整数とする.

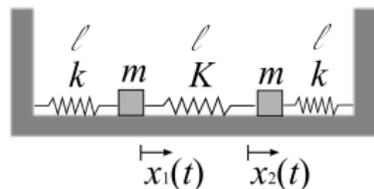
Quiz 略解 II

- $\cos 7t = 1$ となる $t = \frac{2n}{7}\pi$ では $x(t)$ は $4\cos t$ に接する.
- $\cos 7t = -1$ となる $t = (\frac{2n}{7} + \frac{1}{7})\pi$ では $x(t)$ は $-4\cos t$ に接する. 特に $x(\pi) = +2$.
- $\cos 7t = 0$ となる $x = (\frac{2n}{7} + \frac{1}{14})\pi$ では $x(t) = 0$ となる.
- $4\cos t = 0$ となる $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ でも $x(t) = 0$ となるが, これは上に含まれる. これらの点ではこの2つの余弦関数の両方が符号を変えるため, $x(t)$ としては符号が変わらない (負 \rightarrow 0 \rightarrow 負). 2次関数 $-(x - \frac{1}{2}\pi)^2$ のような形になる.

うなりのまとめ

固有周波数 $\omega_1 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

固有モード $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t), \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t)$



2物体の連成振動のシミュレーション

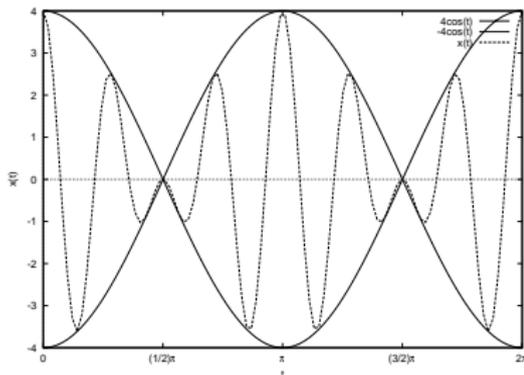
ある初期条件では,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t \\ &= 2 \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \times \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \\ &= 2 \cos \omega_{\text{av}} t \times \cos \frac{1}{2} \omega_{\text{beat}} t \end{aligned}$$

差(うなりの周波数) $\omega_{\text{beat}} = |\omega_1 - \omega_2|$

平均 $\omega_{\text{av}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \simeq \sqrt{k/m}$

K が小さいとき, $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega_{\text{av}}$. 速い $\omega_{\text{av}} \gg \omega_{\text{beat}}$ 遅い.



うなり

2つの物体をつなぐばね K が弱いときに起きる.

$$\text{うなりの周波数} = \omega_{\text{beat}} = |\omega_1 - \omega_2|.$$

音が大きくなる間隔

= 速い周期の振幅が最大になる間隔

$$= \text{遅い単振動の周期の } \frac{1}{2} \text{ 倍} = 2\pi/\omega_{\text{beat}}$$

うなりのシミュレーション

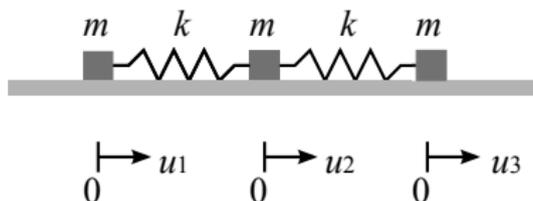
3 物体の連成振動

平衡点からの変位の記号をさりげなく変更: u_1, u_2, u_3 .

$$mu_1'' = -k(u_1 - u_2)$$

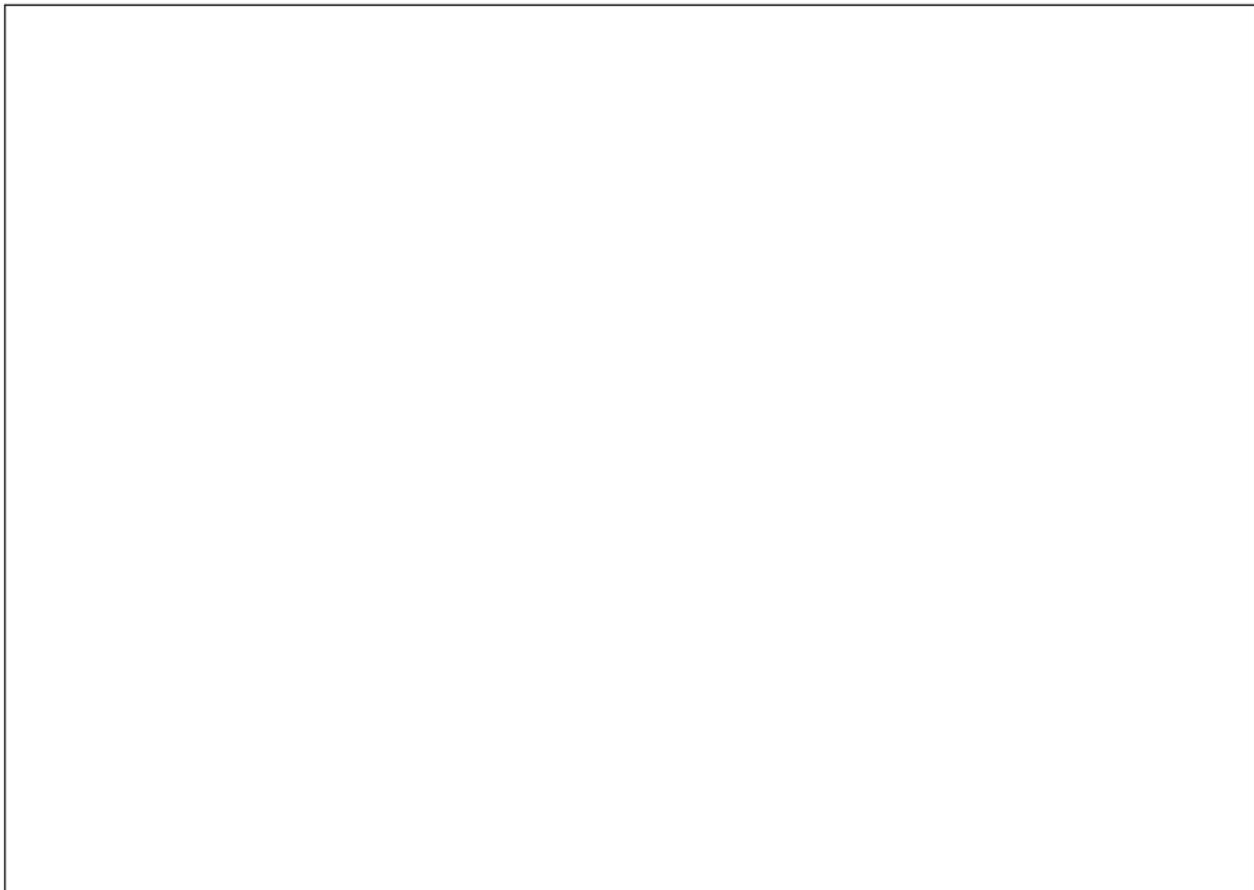
$$mu_2'' = +k(u_1 - u_2) - k(u_2 - u_3)$$

$$mu_3'' = \quad \quad \quad +k(u_2 - u_3)$$



3 物体の連成振動のシミュレーション

固有モードを使って解こう!

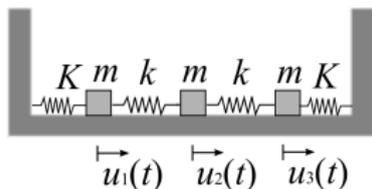


- 重心座標 $\mathbf{X} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$. 外力がなければ重心は等速直線運動
- 基準座標を使って解こう \Rightarrow 模範解答を作ろうプロジェクト

力学

Quiz

Quiz:
 図のように4つのばね(ばね定数 $K = k = 1$)で結ばれた質量 $m = 1$ の3物体が、一直線上で運動している。時刻 t における位置 $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ は、それぞれの質点のつりあいの位置(ばねがともに自然長になる位置)からはかった変位である。



- ① u_1, u_2, u_3 について運動方程式をたてよう。
- ② 固有周波数を求めよう。
- ③ 固有モードを求めよう。

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

- 小形 p.42-47
- 3 物体の連成振動 小形 3 章演習問題 [1](p.57),
- 3 物体の連成振動 小形 3 章演習問題 [2](p.57)

次回の予習ポイント

- やったことのあるひとは Fourier 級数変換

今週はスペシャルな予習復習問題!

今週の予習復習問題はのりが違います!

- 3 ピーナッツ
- 今日の quiz の答案をシャッフルして e ラーニングシステムからダウンロードできるようにする (水曜昼以降) ので, それを赤ペンで添削してください.
- **略解はない状態でやってもらいます**
- 添削後の答案をスキャンして PDF にして, e ラーニングシステムから, 2010-11-24 水 23:59 までにアップロードしてください.
- スキャンのしかた <http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php>
- 添削者の名前は書かないでください. 樋口のみ伝わります.

予習復習問題の趣旨と評価ポイント

- 樋口が添削をさぼりたい。
- 教員志望の人も多いんだから、'レポートの添削' を体験しよう!
- もちろん、図書館やネットをサーチして似た問題の解答を発見して、
答えはさわらないでその後ろに赤ペンで丸写しすることもできるわけだけど、それって解答者にはあまり参考にならないでしょ。ここでは、解答の間違い方に応じて、適切な訂正とアドバイスを与えることを目的とします。
- 途中で終わっちゃってる答案に対しては、最後のゴールまで書いてあげる必要はありません。そこまでの誤りを指摘し、その次にどちら方向に行けばいいかをアドバイスしてあげましょう。
- もとの答案を解答者の quiz として、添削を添削者の予習復習問題として(よいアドバイスができていないか? 誤りを見逃していないか? 正解に導いているか?) 評価します。