N 物体の連成振動

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L08(2010-11-30 Tue)

今日の目標

1. N 物体の連成振動の運動方程式を書ける.
2. $A_n = \mathrm{e}^{ipn}$ とおく, で漸化式が解ける.
3. 波数と分散関係の意味を説明できる.
4. N 物体の連成振動の固有周波数と固有モードが公式で求められる.

http://hig3.net

Quiz 略解 I

添削者向け講評

- 採点基準と結果は e ラーニングシステムで
- ほとんどは正しい添削. すばらしい.
- なぜ白黒でスキャン? 赤で採点したらカラー.
- 解答でやってないところまで書かなくていいっていったのに〜

解答者向け講評

- 運動方程式の誤りが多い. $u_1 \leftrightarrow u_3$ 対称性に着目.
- 固有モードを $At + B$ とした誤りが多い. 危険な説明だったけど, $\omega = 0$ (重根) の特殊性だって言ったでしょ.
- 赤が添削者, 緑が樋口の採点.

Quiz 略解:

Quiz 略解 II

1.

$$
\begin{aligned}
mu_1'' &= -Ku_1 - k(u_1 - u_2) \\
mu_2'' &= \qquad\quad + k(u_1 - u_2) - k(u_2 - u_3) \\
mu_3'' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + k(u_2 - u_3) - Ku_3
\end{aligned}
$$

$m = 1, k = K = 1$ より

$$
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Quiz 略解 III

2. $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t}$ が解だとする. 代入すると,

$$(i\omega)^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

すなわち, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ は K の固有ベクトル, 固有周波数 を ω とすると,
ω^2 は K の固有値.
K の固有値固有ベクトルを求める.

$$\begin{aligned} 0 = \det(\lambda E - K) &= (\lambda - 2)((\lambda - 2)^2 - 1) - 1(1(\lambda - 2)) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) \end{aligned}$$

より, $\lambda = 2, 2 \pm \sqrt{2}$. よって, 固有周波数 $\omega = \sqrt{2}, \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} > 0$.

Quiz 略解 IV

3. これらの λ に対応する固有ベクトルは, $(\lambda E - K)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} s. \qquad (s \in \mathbb{R})$$

$\pm\omega$ を考えて, 固有モードはそれぞれ,

$$\boldsymbol{u}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} A_1 \cos\left(\sqrt{2}t - \theta_1\right),$$

$$\boldsymbol{u}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} A_2 \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}t - \theta_1\right),$$

$$\boldsymbol{u}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} A_3 \cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}t - \theta_1\right).$$

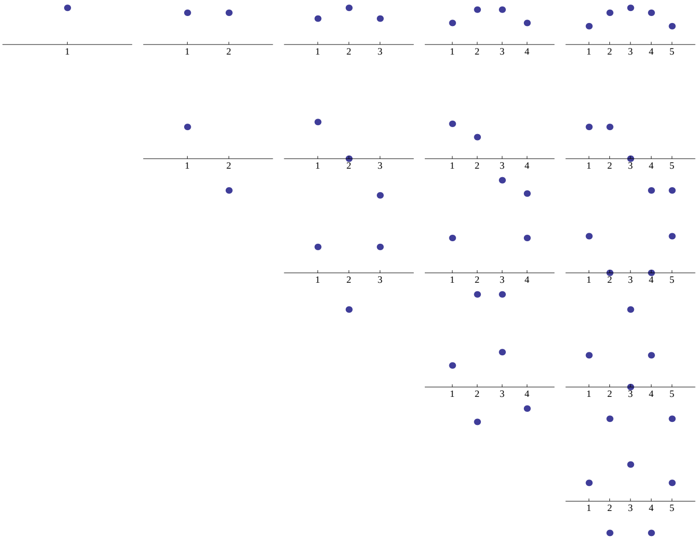
ちなみに一般解は

$$\boldsymbol{u}(t) = C_1\boldsymbol{u}_1(t) + C_2\boldsymbol{u}_2(t) + C_3\boldsymbol{u}_3(t)$$

$N = 2, 3, 4, 5, \ldots$ 物体の場合の連成振動の固有周波数, 固有モード

$N \times N$ 行列が (数値的でもいいから) 対角化できれば答えは求まる.

Out[28]=



N 物体の連成振動の運動方程式

4 物体

$$\begin{aligned}
mu_1'' &= -ku_1 - k(u_1 - u_2) \\
mu_2'' &= \quad +k(u_1 - u_2) - k(u_2 - u_3) \\
mu_3'' &= \quad\quad +k(u_2 - u_3) - k(u_3 - u_4) \\
mu_4'' &= \quad\quad\quad +k(u_3 - u_4) - ku_4
\end{aligned}$$

N 物体 $n = 2, \ldots, N-1$, つまり端以外の場合.

端 $n = 1, N$ を別扱いはややこしい…

姑息なハイテク

u_0,u_{N+1} をいったん導入して, 後で (任意定数を決めるときに?)

$u_0 = u_{N+1} = 0$ を課すことにすれば, $n = \cancel{0,}\ 1, 2, \ldots, N\ \cancel{, N+1}$ に対して上の方程式 1 個でいい.

運動方程式で $\mathrm{e}^{i\omega t}$ してみると?

$$\frac{m}{k}u_n'' = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}.$$

で, 今までののりで, $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t}$, つまり, $u_n(t) = A_n\mathrm{e}^{i\omega t}$ とおく.

$$\frac{m}{k}(i\omega)^2 A_n \mathrm{e}^{i\omega t} = (A_{n-1} - 2A_n + A_{n+1})\mathrm{e}^{i\omega t}$$

固有値固有ベクトル, っていうより, 数列 $\{A_n\}$ の漸化式?
漸化式 $A_{n+1} = -A_{n-1} + (2 - \frac{\omega^2}{k/m})A_n$, '初項' $A_0 = A_{N+1} = 0$.

e^{ipn} とおく, で解ける漸化式

$A_{n+1} = -2A_n, \quad A_0 = 3$ を解こう.
$A_n = A\mathrm{e}^{ipn}$ とおいてみる.

Quiz:

漸化式

$$A_{n+1} = \sqrt{3}A_n - A_{n-1}$$

で定まる数列の一般項を，$A_n = A\mathrm{e}^{ipn}$ とおいてみることで求めよう．ただし初項に対応する定数は未定のまま残してよい．

$$
\begin{aligned}
A_{n-1} - (2 - \tfrac{\omega^2}{k/m}) A_n + A_{n+1} =& 0 \\
\mathrm{e}^{ipn}\mathrm{e}^{-ip} - (2 - \tfrac{\omega^2}{k/m})\mathrm{e}^{ipn} + \mathrm{e}^{ipn}\mathrm{e}^{ip} =& 0 \\
\mathrm{e}^{-ip} + \mathrm{e}^{ip} =& 2 - \frac{\omega^2}{k/m} \\
2\cos(p) =& 2 - \frac{\omega^2}{k/m} \quad \text{(オイラーの公式)}
\end{aligned}
$$

よって, $p = \cos^{-1}(1 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{k/m})$. $-p$ も可能.

$$A_n = A\mathrm{e}^{ipn} + B\mathrm{e}^{-ipn}.$$

初項の条件 $A_0 = 0$ より, $A_0 = A + B = 0$.

$$A_n = A(\mathrm{e}^{ipn} - \mathrm{e}^{-ipn}) = 2iA\sin(np)$$

'初項' の条件 $A_{N+1} = 0$ より

$$A_{N+1} = 2iA\sin((N+1)p) = 0$$

よって, $p = \frac{\pi\ell}{N+1}$. ℓ は整数.

結論.

$$A_n = C\sin(np), \quad p = \frac{\pi\ell}{N+1}.$$

n は物体番号=固有ベクトルの第 n 成分.
ここで, p は物体番号 n を変化させたときの空間的な波の振動の速さを表すので, $\boxed{}$ という. $(n = 1, \ldots, N)$
ℓ は整数. 固有モードを区別.

- $\ell = 0, N+1$ は自明な解. 振動してないので興味ない.
- $\ell < 0, \ell > N+1$ は, 定数倍.
- 結局 ℓ の範囲は $\boxed{}$.

分散関係

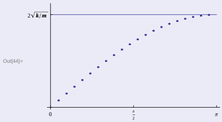
波数を $p_\ell = \frac{\pi\ell}{N+1}$, $\ell = 1, \ldots, N$ と書く.
ω から p が決まると思ってたのに, p は上の値に限られる.
$\Rightarrow$ $\boxed{}$.

$$\begin{aligned}
2 - \frac{{\omega_\ell}^2}{k/m} &= 2\cos(p_\ell) \\
2 - 2\cos(p_\ell) &= \frac{\omega_\ell^2}{k/m} \\
4\sin^2(\tfrac{1}{2}p_\ell) &= \frac{\omega_\ell^2}{k/m} \qquad \boxed{} \\
\omega_\ell &= 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\tfrac{1}{2}p_\ell)
\end{aligned}$$

ω と p の関係.
ある固有モードを決めたとき

- 固有周波数 ω : 時刻 t が変化したときに $\boldsymbol{u}(t)$ がどのくらいの速さで振動するかを表す
- 波数 p: 物体番号 n が変化したときに $u_n(t) \sim A_n$ がどのくらいの速さで振動するかを表す

N 物体の固定端の連成振動の場合, $\omega_\ell = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\frac{1}{2}p_\ell)$.



N 物体の固定端の連成振動のまとめ

以下, 固有モード $\ell = 1, 2, \ldots, N$ をひとつ固定する.
物体番号 $n = (0,)1, 2, \ldots, N(, N+1)$.
固有周波数 $\omega_\ell = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\frac{1}{2}\frac{\pi\ell}{N+1})$.
波数 $p_\ell = \frac{\pi\ell}{N+1}$.
固有モード (の関数形)

$$u_n(t) = A_n C\cos(\omega_\ell t - \theta_\ell) = \sin(np_\ell)C\cos(\omega_\ell t - \theta_\ell).$$

ω と p の関係 (分散関係) $\omega_\ell = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\frac{1}{2}p_\ell)$
一般解は全ての固有モード $\ell = 1, 2, \ldots, N$ の線形結合で

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \sum_{\ell=1}^{N} C_\ell \sin(np_\ell)\cos(\omega_\ell t - \theta_\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{N} C_\ell \sin(\tfrac{\pi\ell n}{N+1})\cos\left(2\sqrt{\tfrac{k}{m}}\sin(\tfrac{\pi\ell}{2(N+1)})t - \theta_\ell\right). \end{aligned}$$

Quiz

Quiz:
$N=5$ とする.
上で求めた最終的な式をそのまま利用してよいので, 固有周波数をすべて求めよう. 固有モードのうち, $\ell=1, \ell=5$ を求めよう. $\sin$ の値の中には, 具体的には計算できないものもあるかも.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題 小形 p.47-57

- 分散関係 小形 例題 3.2(p.55)
- N 質点の連成振動の固有モード 小形 3 章演習問題 [3](p.57),[5](p.58)

次回の予習ポイント

- 偏微分 (微積分・演習)
- 偏微分方程式 (現象の数学 A)

予習復習問題明日水曜日の昼にはeラーニングシステムで公開するので